

Un corso di Finanza Matematica.

Maurizio Pratelli

Anno Accademico 2021-22

Gli appunti che seguono corrispondono al materiale svolto nel corso di *Finanza Matematica* nell'anno accademico 2021-22. Si tratta di un corso semestrale, per studenti della laurea Magistrale in Matematica dell'Università di Pisa.

Non è richiesta alcuna conoscenza preliminare di Economia o di Finanza, viceversa si suppone che gli studenti abbiano seguito il corso di *Istituzioni di Probabilità*, o almeno che siano a conoscenza delle nozioni fondamentali dell'integrazione stocastica secondo Ito.

Questi appunti non seguono esplicitamente alcun libro, tuttavia si ispirano fortemente (per i capitoli 2, 3 e 4) ai due seguenti libri:

Lamberton D., Lapeyre B. *Introduction to Stochastic Calculus applied to Finance*. Chapman and Hall

Bjork T. *Arbitrage Theory in continuous time*. Oxford University Press.

Per capire i problemi reali della Finanza è molto utile (anche se di livello matematico troppo approssimativo) il seguente volume

Hull J.C. *Options, futures and other derivatives*. Diverse edizioni presso l'editore Pearson.

Il Capitolo 5 invece segue da vicino una parte del corso tenuto dal prof. Freddy Delbaen presso la Scuola Normale nell'anno 2000 (e tiene conto di sviluppi successivi).

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
1.1	Prime nozioni. . . . .	5
1.2	Alcuni risultati indipendenti dal modello. . . . .	7
1.3	Dai modelli alla realtà. . . . .	8
<b>2</b>	<b>Modelli a tempi finiti</b>	<b>9</b>
2.1	Modelli a tempi finiti: i teoremi fondamentali . . . . .	9
2.2	Il caso di uno spazio finito . . . . .	13
2.3	Il caso generale . . . . .	14
2.4	Appendice . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Modelli a tempi continui</b>	<b>21</b>
3.1	Il modello di Samuelson-Black-Scholes . . . . .	21
3.2	Le formule di Black-Scholes . . . . .	26
3.3	I modelli a volatilità locale . . . . .	29
3.4	Legami con le equazioni a derivate parziali . . . . .	30
3.5	I modelli a volatilità stocastica . . . . .	32
3.6	Il principio del Cambio di Numerario . . . . .	34
3.7	Esempi sul cambio di numerario . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Tassi d'interesse</b>	<b>39</b>
4.1	Generalità sui tassi d'interesse . . . . .	39
4.2	Proprietà indipendenti dal modello . . . . .	41
4.3	Principi di modellizzazione . . . . .	42
4.4	Modelli basati sul tasso a breve . . . . .	45
4.5	Inversione della curva dei rendimenti . . . . .	49
4.6	Deformazione della curva dei tassi . . . . .	51
4.7	Cambio di numerario . . . . .	54
4.8	Modelli basati sul tasso LIBOR . . . . .	57
4.9	Conclusioni e estensioni . . . . .	60
4.10	Appendice . . . . .	62

4.10.1	Sul modello C.I.R. . . . . .	62
4.10.2	Sul teorema di Fubini stocastico . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Misure di rischio</b>	<b>65</b>
5.1	Introduzione alle misure di rischio: il VaR . . . . .	65
5.2	Teoria assiomatica delle misure di rischio . . . . .	66
5.3	Esempi e misure di rischio in pratica . . . . .	71
5.4	Dipendenza tra variabili aleatorie . . . . .	73
5.5	Appendice . . . . .	75

# Capitolo 1

## Introduzione ai Derivati Finanziari.

### 1.1 Prime nozioni.

Accanto ai prodotti finanziari *principali* (come azioni, beni di consumo, ecc.), hanno assunto sempre maggiore importanza i cosiddetti “*prodotti derivati*”, i più semplici dei quali sono le *opzioni*. Una opzione è un titolo che dà il diritto, ma non l’obbligo, di eseguire una determinata operazione ad un prezzo prefissato.

Ad esempio una opzione di acquisto (“*call*”) o di vendita (“*put*”) dà il diritto di acquistare (o vendere) al tempo  $T$  un prodotto  $S$  al prezzo *strike*  $K$ : naturalmente viene esercitata solo se è conveniente ed il suo rendimento è pertanto  $(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$  (per una opzione *put* il rendimento sarà viceversa  $(K - S_T)^+$ ).

L’utilizzo dei prodotti derivati offre la possibilità di amplificare notevolmente i guadagni (ma anche le perdite): questa proprietà si chiama *leva finanziaria*.

Supponiamo ad esempio che le azioni Fiat valgano oggi 20 € e che le opzioni *call* a 21 € a 30 giorni costino 1 €. Io possiedo un capitale di 2000 € e mi aspetto che il prezzo di queste azioni salga: allora posso comprare o direttamente 100 azioni oppure 2000 opzioni *call*.

Nel primo caso, se il prezzo sale a 23 realizzo un profitto di 300 €, se sale a 24 realizzo un profitto di 400 € e se rimane a 20 € il profitto è 0. Nel secondo caso invece se il prezzo sale a 23 realizzo un profitto di 2000 € (ogni opzione *call* rende 2 €), se sale a 24 il profitto è di 3000 € ma se rimane a 20 € perdo tutto il capitale impiegato.

Questa possibilità di amplificare i risultati (leva finanziaria) è ancora più forte con i *futures*: i futures formano un mercato quotato nel quale ogni giorno il prezzo viene aggiornato e chi si pone in una posizione di acquisto (*posizione lunga*) oppure di vendita (*posizione corta*) (dopo aver depositato un certo capitale per garanzia) usufruisce delle variazioni giornaliere dei prezzi (è come se avesse un flusso continuo di interessi, che possono naturalmente essere anche negativi).

Alla scadenza naturalmente il prezzo future si avvicina e alla fine coincide col prezzo giornaliero (*prezzo spot*).

Supponiamo che il prezzo future per un barile di petrolio di qui alla fine dell'anno sia oggi di 58 \$, domani a 59, dopo due giorni a 61 e poi scende a 57: se mi metto in una *posizione lunga* realizzo +1 dopo un giorno, +2 dal secondo al terzo giorno (e quindi cumulativamente +3 in due giorni), e -4 dal terzo al quarto giorno (cumulativamente -1 in 4 giorni); naturalmente in una posizione corta il risultato è l'opposto.

I prodotti derivati possono essere utilizzati per *copertura dai rischi* ma anche per *speculazione*: la maggior parte di utenti dei futures non usufruisce di essi fino alla scadenza ma a un certo punto chiude la posizione aprendone una di segno opposto. Risulta evidente la possibilità di amplificare la leva finanziaria a fini speculativi utilizzando i futures.

Di fronte a un prodotto derivato, ad esempio una opzione, si pongono due problemi: la valutazione (*"pricing"*), stabilire cioè il prezzo equo della opzione, e la copertura (*"hedging"*). La copertura è il problema di chi emette il prodotto derivato che ne incassa subito il prezzo ma deve garantire di poterlo coprire nel caso l'opzione venga esercitata.

Un altro concetto importante è quello di *"arbitraggio"*: un arbitraggio è una operazione che permette, con capitale iniziale nullo e senza rischi, di realizzare un guadagno positivo con probabilità positiva.

Se il prezzo di 10 azioni IBM è a New York di 80 \$ e a Francoforte di 70 € ed il cambio euro/dollaro è di 1,15 (cioè di fatto a Francoforte le azioni costano 80,5 \$), chi contemporaneamente compra le azioni a NY e le vende a Francoforte realizza un guadagno sicuro (col mercato telematico questa operazione contemporanea è possibile).

Nei mercati reali talvolta gli arbitraggi si presentano ma tendono ad essere eliminati nel giro di pochi secondi: si suppone pertanto che un mercato efficiente non consenta arbitraggi ed il prezzo equo di una opzione è per definizione il prezzo che non consente arbitraggi (né per chi emette il titolo, né per chi lo acquista).

Si chiama *mercato primario* quello che è ufficialmente quotato e codificato da Borse internazionali, e *mercato secondario* quello che avviene direttamente tra istituzioni finanziarie: ai nostri giorni (anche se potrebbe sembrare un con-

trosenso) il volume dei movimenti finanziari dei mercati secondari è di gran lunga superiore a quello dei mercati primari e la maggior parte delle Banche o Istituzioni che falliscono lo fanno per operazioni sui mercati secondari.

Vediamo infine come si calcolano gli *interessi*. Supponiamo di avere la somma di 100 € rivalutata al tasso di interesse del 3 %: dopo un anno si hanno le seguenti valutazioni

$$\text{interesse annuale} \quad 100(1 + 0,03) = 103$$

$$\text{interesse mensile} \quad 100\left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{12} = 103,041$$

$$\text{interesse giornaliero} \quad 100\left(1 + \frac{0,03}{365}\right)^{365} = 103,045$$

Se il tasso di interesse è  $r$ , al tempo  $t$  con gli *interessi lineari* la somma 1 diventa  $(1 + rt)$  mentre con gli *interessi continuamente composti* diventa  $e^{rt}$  (questa definizione deriva dalla proprietà  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{rt}{n}\right)^n = e^{rt}$ ).

Anche se il linguaggio usuale (ad esempio allo sportello di una banca) è quello degli interessi lineari, nei modelli matematici vengono usati gli interessi continuamente composti (vedremo che sono estremamente più comodi per le loro proprietà matematiche).

Abbiamo detto sopra che detenere un *future* equivale di fatto ad avere un flusso di interessi, che possono anche essere negativi: nonostante sembri un assurdo dal punto di vista economico gli interessi di certi titoli possono, in situazioni economiche di stagnazione, effettivamente essere negativi. Ritorniamo su questo discorso nel capitolo 4 parlando dei modelli per i tassi d'interesse.

## 1.2 Alcuni risultati indipendenti dal modello.

Poiché non si conosce evidentemente l'evoluzione futura del prezzo di un attivo, la valutazione di una opzione (o di un altro prodotto derivato) deve dipendere da un modello, e si può constatare che modelli diversi possono portare a valutazioni anche molto differenti. Ci sono però alcune proprietà indipendenti dal modello e ne vediamo subito un paio come esempio.

Chiamiamo  $C_t$  e  $P_t$  la valutazione al tempo  $t$  di un *call* e di un *put* su un attivo  $S_t$  con scadenza  $T$  e prezzo strike  $K$ , supponiamo ancora che il tasso d'interesse di riferimento sia  $r$ .

**Proposizione 1.2.1 (Parità call-put).** *Affinché non vi siano arbitraggi, deve valere la formula*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

*Dimostrazione.* Notiamo che la quantità  $C_t - P_t$  diventa, al tempo  $T$ ,  $(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$ ; ma anche  $S_t - Ke^{-r(T-t)}$  diventa  $S_T - K$ . Una valutazione diversa dunque offrirebbe opportunità di arbitraggio.  $\square$

Indichiamo ora con  $C_t(K)$  l'opzione call al tempo  $t$  rispetto al prezzo strike  $K$  e consideriamo due prezzi strike  $K_1 < K_2$ . Per semplicità consideriamo il valore intermedio  $\frac{K_1+K_2}{2}$  ma la dimostrazione può facilmente essere modificata per considerare una qualsiasi combinazione convessa dei due prezzi.

**Proposizione 1.2.2 (Convessità rispetto al prezzo strike).** *Affinché non vi siano arbitraggi deve valere la disequaglianza*

$$C_t\left(\frac{K_1 + K_2}{2}\right) \leq \frac{C_t(K_1) + C_t(K_2)}{2}$$

*Dimostrazione.* Infatti  $C_t\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right)$  diventa alla scadenza  $\left(S_T - \frac{K_1+K_2}{2}\right)^+$  mentre  $\frac{C_t(K_1)+C_t(K_2)}{2}$  diventa  $\frac{(S_T-K_1)^+ + (S_T-K_2)^+}{2}$  ed il risultato è dunque una conseguenza della convessità della funzione  $K \rightarrow (S_T - K)^+$ .  $\square$

### 1.3 Dai modelli alla realtà.

Bisogna fare attenzione al fatto che i modelli sono sempre una descrizione approssimativa della realtà, e le proprietà dimostrate nel modello non sempre si traducono alla lettera nel mondo reale.

Un esempio significativo è la parità call-put che nei fatti non è rispettata: le opzioni put tendono ad essere sopravvalutate rispetto alla parità. Questo perchè nel mercato c'è una maggiore richiesta di opzioni put ed è vero che in teoria una opzione put può essere sintetizzata a partire da una call e dall'attivo in questione ... ma questa proprietà vera nel modello è realistica per una istituzione finanziaria ma non per un generico cliente.

Allo stesso modo a volte osservando i prezzi quotati delle opzioni si trova che la convessità non è rispettata: all'interno del modello questo darebbe luogo ad un arbitraggio ... ma nella realtà i costi di transazione delle operazioni rendono irrealizzabile questo arbitraggio.

In definitiva i risultati dei modelli matematici, pur fondamentali nelle applicazioni pratiche, devono sempre essere usati con estrema cautela.

# Capitolo 2

## Modelli multiperiodali a tempi finiti.

### 2.1 Modelli a tempi finiti: i teoremi fondamentali

Consideriamo un modello nel quale l'insieme dei tempi è  $\mathcal{T} = (0, 1, \dots, N)$ , su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  sul quale è assegnata una *filtrazione*, cioè una famiglia crescente di  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_N$ . Nei modelli finanziari usualmente  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  e non è restrittivo supporre  $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ .

Un processo stocastico  $(X_n)_{n=0}^N$  è detto *adattato* se, per ogni  $n$ ,  $X_n$  è  $\mathcal{F}_n$ -misurabile, ed è detto *prevedibile* se  $X_n$  è  $\mathcal{F}_{n-1}$ -misurabile. Nei processi prevedibili usualmente il primo istante è 1, in ogni caso si definisce  $\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0$ .

Nel mercato è presente un attivo *senza rischio* (o *bond*)  $S_n^0 = B_n = (1+r)^n$  (la somma 1 rivalutata al tasso d'interesse  $r$  sul periodo, composto). Sono poi presenti  $d$  attivi con rischio rappresentati da  $d$  processi stocastici *adattati*  $(S_n^i)_{n=0}^N$ . Indichiamo  $S_n = (S_n^1, \dots, S_n^d)$ .

Si chiama *strategia di portafoglio* una coppia  $(H_n^0, H_n)_{n=1}^N$  dove  $(H_n^0)_{n \geq 1}$  è prevedibile a valori reali,  $(H_n)_{n \geq 1}$  è prevedibile a valori in  $\mathbb{R}^d$  ( $H_n^i$  indica la quantità dell'attivo  $S^i$  detenuto tra  $n-1$  e  $n$ , la scelta è fatta all'istante  $n-1$  e quindi è naturale che sia  $\mathcal{F}_{n-1}$ -misurabile).

Il *valore del portafoglio* è  $V_n = H_n^0 S_n^0 + H_n \cdot S_n$ .

**Definizione 2.1.1.** Il portafoglio è detto *autofinanziato* se per ogni  $n$  si ha  $H_n^0 S_n^0 + H_n \cdot S_n = H_{n+1}^0 S_n^0 + H_{n+1} \cdot S_n$ .

Questa definizione traduce il fatto che, ad ogni scelta (ogni istante  $n$ ) il capitale viene spostato da un attivo all'altro, senza immettere o togliere nuovo capitale.

Introduciamo la notazione  $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ : facili passaggi provano che la condizione di autofinanziamento è equivalente a  $\Delta V_n = H_n^0 \Delta S_n^0 + H_n \cdot \Delta S_n$ .

Introduciamo ora l'*attualizzazione*: gli attivi *attualizzati* (rispetto all'attivo  $S_n^0$  detto *numerario*) sono definiti da  $\tilde{S}_n^i = \frac{S_n^i}{S_n^0} = \frac{S_n^i}{(1+r)^n}$  (naturalmente  $\tilde{S}_n^0 \equiv 1$ ). Anche per il portafoglio si pone  $\tilde{V}_n^i = \frac{V_n^i}{S_n^0} = \frac{V_n^i}{(1+r)^n}$ , ed è facile constatare che in termini attualizzati la condizione di autofinanziamento diventa  $\Delta \tilde{V}_n = H_n^0 \Delta \tilde{S}_n^0 + H_n \cdot \Delta \tilde{S}_n = H_n \cdot \Delta \tilde{S}_n$ .

**Proposizione 2.1.2.** *Assegnato un capitale iniziale  $x$  ed un processo prevedibile  $(H_n)_{n=1}^N$  a valori in  $\mathbb{R}^d$ , esiste un solo  $(H_n^0)_{n=1}^N$  reale prevedibile tale che  $(H_n^0, H_n)$  sia la strategia di un portafoglio autofinanziato con  $V_0 = x$ .*

*Dimostrazione.* Se esiste tale strategia, si ha

$$H_n^0 + H_n \cdot \tilde{S}_n = V_0 + \sum_{j=1}^n H_j \cdot \Delta \tilde{S}_j$$

Di conseguenza definiamo

$$H_n^0 = x + \sum_{j=1}^n H_j \cdot \Delta \tilde{S}_j - H_n \cdot \tilde{S}_n = x + \sum_{j=1}^{n-1} H_j \cdot \Delta \tilde{S}_j - H_n \cdot \tilde{S}_{n-1}$$

che è  $\mathcal{F}_{n-1}$  misurabile. □

**Definizione 2.1.3.** Si chiama **arbitraggio** un portafoglio autofinanziato con  $V_0 = 0$ ,  $V_N \geq 0$  e  $\mathbf{P}\{V_N > 0\} > 0$  (notiamo che la condizione dipende solo dalla *classe di equivalenza* di  $\mathbf{P}$ ).

Se non esistono arbitraggi diremo che vale l'**ipotesi N.A.** .

Ricordiamo che si chiama *martingala* un processo  $(M_n)_{n=0}^N$  tale che,  $\forall n$ ,  $M_n$  è  $\mathcal{F}_n$ -misurabile e integrabile, e  $\mathbf{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$ , cioè  $\mathbf{E}[\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0$ .

Il risultato che ora viene enunciato è noto come **Primo teorema fondamentale della valutazione degli attivi** (a tempi finiti).

**Teorema 2.1.4 (Dalang-Morton-Willinger).** *Sono equivalenti*

- a) *non esistono arbitraggi (N.A.);*
- b) *esiste una probabilità  $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$  tale che ogni  $(\tilde{S}_n^i)_{n=0}^N$  sia una martingala; inoltre si può scegliere  $\mathbf{Q}$  con  $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \in L^\infty$ .*

$\mathbf{Q}$  è chiamata probabilità martingala equivalente.

La dimostrazione dell'implicazione  $b) \Rightarrow a)$  è facile: sia infatti  $(H_n^0, H_n)$  una strategia autofinanziata di costo iniziale 0 e partiamo da una probabilità  $\mathbf{P}$  tale che ogni  $(H_n^i)$  e  $(S_n^i)$  sia di quadrato integrabile; sia poi  $\mathbf{Q}$  una probabilità martingala equivalente con  $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \in L^\infty$ .

Allora anche  $\tilde{V}_n$  è una martingala rispetto a  $\mathbf{Q}$ , infatti

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\Delta \tilde{V}_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[H_n \cdot \Delta \tilde{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}] = H_n \cdot \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\Delta \tilde{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}]$$

Si ha pertanto  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{V}_n] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[V_0] = V_0 = 0$ . Di conseguenza, se  $V_N \geq 0$  q.c., necessariamente  $V_N = 0$  q.c..

Nonostante la semplicità dell'enunciato non sono state trovate dimostrazioni brevi dell'implicazione  $a) \Rightarrow b)$  che viene rinviata ai paragrafi successivi. Osserviamo che tale implicazione è falsa se il modello è a tempi continui, ed anche se l'insieme dei tempi è  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Cominciamo a introdurre alcune notazioni:  $L^0 = L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  è lo spazio di tutte le variabili aleatorie munito della convergenza in probabilità,  $L_+^0$  lo spazio delle v.a. a valori positivi. Indichiamo poi con  $\mathcal{M}^e$  l'insieme (eventualmente vuoto) delle probabilità martingala equivalenti, e con  $\mathcal{M}^a$  l'insieme delle probabilità martingala assolutamente continue rispetto a  $\mathbf{P}$ .

Dato un attivo aleatorio  $X$  (di fatto una variabile aleatoria  $\mathcal{F}_N$ -misurabile a valori non negativi), si chiama portafoglio *replicante* un portafoglio tale che  $V_N = X$  e portafoglio *di copertura* uno tale che  $V_N \geq X$ .

Indichiamo

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{n=1}^N H_n \cdot \Delta \tilde{S}_n \mid (H_n)_{n=1}^N \text{ prevedibile a valori in } \mathbb{R}^d \right\}$$

$\mathcal{C}$  denota i valori finali (attualizzati) dei portafogli a costo 0, o (ciò che è lo stesso) i valori attualizzati degli attivi aleatori *replicabili a costo 0*.

$$\mathcal{C} - L_+^0 = \left\{ X \leq \sum_{n=1}^N H_n \cdot \Delta \tilde{S}_n \mid (H_n)_{n=1}^N \text{ prevedibile a valori in } \mathbb{R}^d \right\}$$

è l'insieme dei valori attualizzati degli attivi aleatori *ricopribili a costo 0*.

La condizione di assenza di arbitraggio si può esprimere con la formula  $\mathcal{C} \cap L_+^0 = \{0\}$ .

**Definizione 2.1.5.** Il mercato si dice **completo** se ogni attivo aleatorio è replicabile.

Il risultato che segue è noto come **Secondo teorema fondamentale della valutazione degli attivi**.

**Teorema 2.1.6.** *Supponiamo che valga l'ipotesi N.A.: sono allora equivalenti*

- a) *il mercato è completo*
- b) *esiste una sola probabilità martingala equivalente*

Anche questa volta la dimostrazione dell'implicazione  $a) \Rightarrow b)$  è facile: sia infatti  $X$  una v.a. limitata e sia  $(V_n)_{n=0}^N$  un portafoglio replicante. Presa una qualunque probabilità martingala  $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e$ , si ha  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{X}] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{V}_N] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[V_0] = V_0$ . Ma se esistessero due probabilità martingala  $\mathbf{Q}^1 \neq \mathbf{Q}^2$ , esisterebbe  $X$  limitata con  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^1}[X] \neq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^2}[X]$ .

Prima di provare l'altra implicazione premettiamo una definizione:

**Definizione 2.1.7.** Dato un attivo aleatorio  $X$  integrabile, si chiama *sistema di prezzi di non arbitraggio* un processo stocastico  $(\pi_n)_{n=0}^N$  adattato tale che  $\pi_N = X$  e che, introducendo un nuovo attivo con rischio  $S_n^{d+1} = \pi_n$ , il mercato *allargato* non dia luogo ad arbitraggi.

È immediato constatare che i sistemi di prezzi equi si ottengono scegliendo una probabilità  $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e$  e ponendo

$$\tilde{\pi}_n = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{X} | \mathcal{F}_n], \quad \text{cioè} \quad \pi_n = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \frac{X}{(1+r)^{N-n}} \middle| \mathcal{F}_n \right]$$

La dimostrazione dell'implicazione  $b) \Rightarrow a)$  del teorema 2.1.6 è allora una immediata conseguenza del risultato seguente (anche la dimostrazione di questo è rinviata ai paragrafi successivi).

**Proposizione 2.1.8.** *Supponiamo che valga N.A. e sia  $X$  integrabile non replicabile, e sia  $\pi = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{X}]$  un prezzo di non arbitraggio: esiste  $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{M}^e$  con  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*}[\tilde{X}] > \pi$ .*

Di conseguenza, un attivo  $X$  è replicabile se e solo se esiste per lui un solo prezzo di non-arbitraggio (ed un solo portafoglio replicante), altrimenti esiste per  $X$  un *intervallo aperto* (eventualmente infinito) di prezzi equi. Sia  $V$  un portafoglio di copertura per un attivo aleatorio  $X$  (supposto che esista) e  $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e$ :  $V_0 = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{V}] \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{X}]$ . Vale il risultato seguente:

**Teorema 2.1.9.** *Sia  $X$  un attivo aleatorio e sia  $x_0 = \sup \{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{X}] \mid \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e \}$ : se  $x_0 \in \mathbb{R}$  esiste un portafoglio di copertura con  $V_0 = x_0$ .*

Dunque  $x_0$  rappresenta il minimo valore iniziale di un portafoglio di copertura, osserviamo però che il prezzo  $x_0$  è un *prezzo di arbitraggio*.

## 2.2 Dimostrazione dei teoremi fondamentali nel caso di uno spazio finito

Le dimostrazioni che abbiamo lasciato in sospeso nel paragrafo precedente sono particolarmente semplici nel caso in cui  $\Omega$  è un insieme finito  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ ; non è restrittivo supporre che si abbia  $\mathbf{P}(\omega_i) > 0$  per ogni  $i$  ed ogni probabilità  $\mathbf{Q}$  con questa proprietà è equivalente a  $\mathbf{P}$ . Le variabili aleatorie su  $\Omega$  si identificano con i vettori di  $\mathbb{R}^k$  e consideriamo l'usuale prodotto scalare  $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^k X(\omega_i)Y(\omega_i)$ .

**Dimostrazione di 2.1.4 a)  $\Rightarrow$  b).** Riprendendo le notazioni del primo paragrafo, sia

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{n=1}^N H_n \cdot \Delta \tilde{S}_n \mid (H_n)_{n=1}^N \text{ prevedibile a valori in } \mathbb{R}^d \right\}$$

l'insieme dei valori (attualizzati) degli *attivi ottenibili a costo 0*, e sia

$$\mathcal{D} = \left\{ Y : Y(\omega_i) \geq 0 \forall i, Y(\omega_1) + \dots + Y(\omega_k) = 1 \right\}$$

Notiamo che  $\mathcal{C}$  è un sottospazio vettoriale (convesso chiuso) in  $\mathbb{R}^k$  e  $\mathcal{D}$  un convesso compatto, pertanto grazie al teorema di Hahn-Banach in  $\mathbb{R}^k$  esistono una v.a.  $Z$  ed una costante  $a$  tali che

$$\langle Z, V \rangle < a < \langle Z, Y \rangle \quad \forall V \in \mathcal{C}, \forall Y \in \mathcal{D}$$

Poiché  $\mathcal{C}$  è uno spazio vettoriale, segue  $\langle Z, V \rangle = 0$  per ogni  $V \in \mathcal{C}$  e  $a > 0$ ; e da qui segue anche  $Z(\omega_i) > 0$  per ogni  $i$ . Definiamo allora la nuova probabilità  $\mathbf{Q}(\omega_i) = \frac{Z(\omega_i)}{\sum_{j=1}^k Z(\omega_j)}$  e notiamo che, per ogni  $V \in \mathcal{C}$ , si ha  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[V] = 0$ , cioè, per ogni scelta di  $H_1, \dots, H_n$  prevedibili

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \sum_{n=1}^N H_n \cdot \Delta \tilde{S}_n \right] = 0$$

Ma questo equivale a dire che ogni  $(\tilde{S}_n^j)_{n=0, \dots, N}$  è una  $\mathbf{Q}$ -martingala: fissiamo infatti  $n$ , e  $j$  con  $1 \leq j \leq d$  e  $A \in \mathcal{F}_{n-1}$ , e sia

$$H_m^i = \begin{cases} I_A & \text{se } i = j \text{ e } m = n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si ottiene così  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[I_A \cdot \Delta \tilde{S}_n^j] = 0$ , e poichè questo vale per ogni  $A \in \mathcal{F}_{n-1}$ , si ottiene  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\Delta \tilde{S}_n^j | \mathcal{F}_{n-1}] = 0$ .  $\square$

**Dimostrazione di 2.1.8.** Possiamo rappresentare l'insieme delle valori (attualizzati) degli attivi replicabili come  $(\mathcal{C} + \mathbb{R} \cdot 1)$  (intendendo con 1 la v.a. che vale identicamente 1): presa  $X$  non replicabile possiamo nuovamente separare (con Hahn-Banach)  $\mathcal{V}$  e  $\{\tilde{X}\}$ : esistono una v.a.  $Z$  ed una costante  $a$  tali che

$$\langle Z, V \rangle < a < \langle Z, \tilde{X} \rangle \quad \forall V \in \mathcal{C}$$

Di nuovo  $\langle Z, V \rangle = 0 \forall V \in \mathcal{V}$  e  $a > 0$ , inoltre si ha  $Z(\omega_1) + \dots + Z(\omega_k) = 0$ .

Definiamo la nuova probabilità  $\mathbf{Q}^*(\omega_i) = \mathbf{Q}(\omega_i) + \frac{Z(\omega_i)}{C}$ , dove la costante  $C$  è scelta in modo tale che si abbia  $\mathbf{Q}^*(\omega_i) > 0$  per ogni  $i$ .

Presa  $V \in \mathcal{C}$  si ha  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*}[V] = 0$  e quindi  $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{M}^e$ , inoltre

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*}[\tilde{X}] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{X}] + \frac{\langle Z, \tilde{X} \rangle}{C} > \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{X}]$$

cioè il risultato cercato.  $\square$

**Dimostrazione del teorema 2.1.9.** Dimostriamo il seguente risultato (dal quale deriva poi la tesi):  $X$  è copribile a costo 0 se e solo se, per ogni  $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e$  si ha  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{X}] \leq 0$ .

Sia  $\mathcal{A}$  l'insieme dei valori attualizzati degli attivi ricopribili a costo 0, sia  $\mathcal{A}^0$  il suo *cono polare* definito da  $\mathcal{A}^0 = \{Y \in \mathbb{R}^k \mid \langle Y, \tilde{X} \rangle \leq 0 \forall \tilde{X} \in \mathcal{A}\}$  e sia  $\mathcal{A}^{00}$  il *cono bipolare* che coincide con l'involuppo convesso chiuso di  $\mathcal{A}$  (è un facile esercizio).

Ma  $\mathcal{A}$  è già convesso chiuso, quindi  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{00}$ . È facile verificare che gli elementi di  $\mathcal{A}^0$  hanno tutte le componenti positive e quindi, a meno di una costante, sono probabilità: più precisamente gli elementi di  $\mathcal{A}^0$  (a parte il vettore identicamente nullo) coincidono a meno di una costante con gli elementi di  $\mathcal{M}^a$ , e poiché  $\mathcal{M}^e$  è denso in  $\mathcal{M}^a$  la conclusione è facile.  $\square$

## 2.3 Dimostrazione dei teoremi fondamentali nel caso generale

Riprendendo le notazioni del primo paragrafo, la condizione di assenza di arbitraggio che avevamo espresso con la formula  $\mathcal{C} \cap L_+^0 = \{0\}$ , si può esprimere anche con la condizione  $(\mathcal{C} - L_+^0) \cap L_+^0 = \{0\}$ . Questa seconda condizione (che sembra strana) sarà importante nella dimostrazione successiva.

È fondamentale il seguente risultato.

**Proposizione 2.3.1.** *Valgono i seguenti risultati:*

- a)  $\mathcal{C}$  è chiuso in  $L^0$ ;

b) se vale N.A.  $(\mathcal{C} - L_+^0)$  è chiuso in  $L^0$ .

La dimostrazione di queste due affermazioni, molto tecnica, è rimandata all'appendice.

Proviamo tuttavia con un controesempio semplice che la condizione N.A. è necessaria nella dimostrazione del punto b): siano  $\mathcal{T} = \{0, 1\}$ ,  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathbf{P}$  la misura di Lebesgue,  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  e  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{B}([0, 1])$ . Supponiamo ci sia un solo attivo con rischio e che  $\Delta \hat{S}_1 = X$  essendo  $X(x) = x$ . Allora  $(\mathcal{C} - L_+^0)$  sono tutte le v.a. maggiorate da un opportuno  $c \cdot X$  ( $c \in \mathbb{R}$ ): è facile costruire variabili che non appartengono a  $(\mathcal{C} - L_+^0)$ , tuttavia ogni  $Y$  si può scrivere  $Y = \lim_{n \rightarrow \infty} (Y \wedge nX)$ , e

$$Y \wedge nX = \min(Y, nX) \in (\mathcal{C} - L_+^0)$$

Fissiamo ora una probabilità  $\mathbf{P}$  tale che ogni  $(S_n^i)$  sia integrabile e denotiamo  $\mathcal{K} = (\mathcal{C} - L_+^0) \cap L^1$  che è chiuso in  $L^1$  (è l'immagine inversa di un chiuso mediante l'immersione continua  $L^1 \hookrightarrow L^0$ ). Più precisamente  $\mathcal{K}$  è un cono (cioè se  $Y \in \mathcal{K}$ ,  $\lambda > 0$  allora  $\lambda Y \in \mathcal{K}$ ) convesso chiuso di  $L^1$ , e contiene  $L_-^1$  (cioè tutte le funzioni integrabili a valori negativi).

**Teorema 2.3.2 (Kreps-Yan).** *Sia  $\mathcal{K}$  un cono convesso chiuso di  $L^1$ , contenente  $L_-^1$ , tale che  $\mathcal{K} \cap L_+^1 = \{0\}$ : esiste  $Z \in L^\infty$  strettamente positiva q.c. tale che si abbia  $\mathbf{E}[YZ] \leq 0 \quad \forall Y \in \mathcal{K}$*

*Dimostrazione.* Prendiamo  $A \in \mathcal{F}$  non trascurabile e separiamo (col teorema di Hahn-Banach) l'insieme  $\mathcal{K}$  (convesso chiuso) da  $I_A$  (convesso compatto): esistono  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $Z_A \in L^\infty$  tali che

$$\mathbf{E}[Z_A Y] < \alpha < \mathbf{E}[Z_A I_A] \quad \forall Y \in \mathcal{K}$$

Poiché  $\mathcal{K}$  è un cono, si deve avere  $\mathbf{E}[Z_A Y] \leq 0 \quad \forall Y \in \mathcal{K}$  (e  $\alpha > 0$ ) quindi  $\mathbf{E}[Z_A I_A] > 0$ ; poichè  $L_-^1 \subseteq \mathcal{K}$  si verifica facilmente che  $Z_A \geq 0$  q.c., inoltre poichè  $\mathbf{E}[Z_A I_A] > 0$ ,  $Z_A$  è strettamente positiva su un sottoinsieme non trascurabile  $B_A \subset A$ , cioè  $B_A = A \cap \{Z_A > 0\}$  è non trascurabile. Consideriamo allora l'unione essenziale degli insiemi  $B_A$  al variare di  $A$  non trascurabile, che si può scrivere come  $B_{A_1} \cup B_{A_2} \cup \dots \cup B_{A_n} \cup \dots$

È facile constatare che questa unione essenziale coincide q.c. con  $\Omega$ , e quindi la v.a.  $Z = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{Z_{A_n}}{\|Z_{A_n}\|_\infty}$  soddisfa la tesi.  $\square$

Siamo ora in grado di dimostrare la parte difficile del *Primo teorema fondamentale*.

**Dimostrazione di 2.1.4** *a)  $\Rightarrow$  b).* Si può supporre che si abbia  $\mathbf{E}[Z] = 1$  e consideriamo  $\mathbf{Q} = Z \cdot \mathbf{P}$ . Prese  $X = \sum_n H_n \cdot \Delta \tilde{S}_n$  con  $H_n$  limitato, si ha  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X] = \mathbf{E}[XZ] \leq 0$ , ma poichè le v.a. di quella forma sono uno spazio vettoriale si deve avere

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \sum_{n=1}^N H_n \cdot \Delta \tilde{S}_n \right] = 0$$

Da questo segue, esattamente come nel paragrafo precedente, che ogni  $(\tilde{S}_n^j)_{n=0, \dots, N}$ , è una  $\mathbf{Q}$ -martingala.  $\square$

Possiamo ora completare la dimostrazione del *Secondo teorema fondamentale* provando il lemma 2.1.8.

**Dimostrazione di 2.1.8.** Possiamo rappresentare l'insieme delle v.a. replicabili come  $(\mathcal{C} + \mathbb{R}.1)$  (intendendo con 1 la v.a. che vale identicamente 1), e sia

$$\mathcal{V} = (\mathcal{C} + \mathbb{R}.1) \cap L^1(\mathbf{Q})$$

sottospazio chiuso. Con il teorema di Hahn-Banach si può costruire  $Z \in L^\infty$  tale che si abbia

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[ZV] = 0 \quad \forall V \in \mathcal{V}, \quad \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[Z\tilde{X}] = 1$$

Poiché in  $\mathcal{V}$  ci sono le costanti, segue  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[Z] = 0$ . Consideriamo allora la probabilità  $\mathbf{Q}^*$  definita da

$$\mathbf{Q}^* = \left( 1 + \frac{Z}{2\|Z\|_\infty} \right) \cdot \mathbf{Q}$$

È immediato constatare che  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*}[\tilde{X}] > \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{X}]$ . Il fatto che  $\mathbf{Q}^*$  sia una probabilità martingala segue dal fatto che  $Z$  si annulla su ogni  $V \in \mathcal{V}$  e si prova come nel teorema di D.M.W.  $\square$

Prima di provare il teorema 2.1.9, diamo una definizione: dati due spazi  $(E, E')$  in dualità e preso un *cono*  $\mathcal{A} \subseteq E$ , si chiama *cono polare*

$$\mathcal{A}^0 = \{x \in E' \mid \langle x', x \rangle \leq 0 \quad \forall x' \in \mathcal{A}\}$$

e in modo analogo si definisce

$$\mathcal{A}^{00} = \{x \in E \mid \langle x', x \rangle \leq 0 \quad \forall x' \in \mathcal{A}^0\}$$

Il *teorema bipolare* per i coni afferma che  $\mathcal{A}^{00}$  coincide con l'involuppo connesso chiuso di  $\mathcal{A}$ . La dimostrazione è in realtà un esercizio: è evidente che

$\mathcal{A}^{00}$  è convesso e chiuso. Chiamiamo ora  $\mathcal{A}^*$  l'involuppo convesso chiuso di  $\mathcal{A}$  e sia  $y \notin \mathcal{A}^*$ : esiste  $x' \in E'$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  tali che

$$\langle x', x \rangle < \alpha < \langle x', y \rangle \quad \forall x \in \mathcal{A}^*$$

Poiché  $\mathcal{A}^*$  è un cono segue  $\langle x', x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{A}$ , cioè  $x' \in \mathcal{A}^0$  ed  $\alpha > 0$ : quindi  $y$  non appartiene a  $\mathcal{A}^{00}$ .

**Dimostrazione del teorema 2.1.9.** Tornando all'insieme  $\mathcal{K} = (\mathcal{C} - L_+^0) \cap L^1$ , segue che  $\mathcal{K}^{00} = \mathcal{K}$ . Se  $Z \in \mathcal{K}^0$ , è facile vedere che è a valori positivi e (a meno di una costante moltiplicativa) è una densità di probabilità: se  $\mathbf{Q} = Z \cdot \mathbf{P}$  si verifica che  $\mathbf{Q}$  è una probabilità martingala, però  $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$  e non necessariamente  $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$  (abbiamo indicato con  $\mathcal{M}^a$  tali probabilità, ed è facile verificare che  $\mathcal{M}^e$  è denso in  $\mathcal{M}^a$  per la topologia debole  $\sigma(L^\infty, L^1)$ ). Dunque  $Y \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[Y] \leq 0, \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e$ . Più in generale  $Y$  è copribile a costo  $x$  se  $\sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{Y}] \leq x$ .  $\square$

## 2.4 Appendice

Dimostriamo la Proposizione 2.3.1. Prima di affrontare la dimostrazione, occorre premettere alcuni risultati.

**Lemma 2.4.1.** *Sia  $Y_1, Y_2, \dots$  una successione di v.a. reali tali che, per quasi ogni  $\omega$ ,  $\underline{Y}(\omega) = \liminf_{n \rightarrow \infty} Y_n(\omega) \in \mathbb{R}$ : esiste una successione convergente di v.a.  $(\tilde{Y}_n)_{n \geq 1}$  tale che, per quasi ogni  $\omega$  fissato,  $\tilde{Y}_k(\omega)$  sia una sottosuccessione dei numeri  $(Y_n(\omega))_{n \geq 1}$ .*

*Dimostrazione.* Definiamo ricorsivamente le funzioni a valori interi

$$\tau_k(\omega) = \inf \left\{ n > \tau_{k-1}(\omega) : |Y_n(\omega) - \underline{Y}(\omega)| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

È facile verificare che  $\tau_k$  è misurabile, che  $\tilde{Y}_k(\omega) = Y_{\tau_k(\omega)}(\omega)$  è misurabile e che  $\tilde{Y}_k(\omega) \rightarrow \underline{Y}(\omega)$ .  $\square$

A noi però servirà estendere questo lemma per variabili a valori in  $\mathbb{R}^d$ : consideriamo dunque v.a. a valori in  $\mathbb{R}^d$  e indichiamo con  $|Y|$  la norma di  $\mathbb{R}^d$ .

**Lemma 2.4.2.** *Sia  $Y_1, Y_2, \dots$  una successione di v.a. in  $\mathbb{R}^d$  tale che*

$$\underline{Y}(\omega) = \liminf_{n \rightarrow \infty} |Y_n(\omega)| < \infty$$

*q.c.; allora esiste una successione convergente di v.a.  $(\tilde{Y}_n)_{n \geq 1}$  a valori in  $\mathbb{R}^d$  tale che la successione (di elementi di  $\mathbb{R}^d$ )  $\tilde{Y}_k(\omega)$  sia una sottosuccessione di  $(Y_n(\omega))_{n \geq 1}$ .*

*Dimostrazione.* In modo simile al lemma precedente, si comincia a definire ricorsivamente

$$\tau_k(\omega) = \inf \left\{ n > \tau_{k-1}(\omega) : |Y_n(\omega) - \underline{Y}(\omega)| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

ottenendo una successione  $(Y_{\tau_k})$  limitata in  $\mathbb{R}^d$ . Si applica poi il procedimento del Lemma 2.4.1 alla successione così ottenuta in modo da far convergere la prima componente, quindi la seconda, etc..  $\square$

**Dimostrazione del punto a).** Cominciamo a supporre  $N = 1$  (però non supponiamo che  $\mathcal{F}_0$  sia la  $\sigma$ -algebra banale): indicando con  $X = \Delta \tilde{S}_1$ , si tratta di provare che se  $H_n$  sono  $\mathcal{F}_0$ -misurabili a valori in  $\mathbb{R}^d$ ,  $H_n \cdot X \rightarrow Y$  in probabilità, esiste  $H$   $\mathcal{F}_0$ -misurabile a valori in  $\mathbb{R}^d$  tale che  $Y = H \cdot X$ . Innanzitutto si può supporre che la convergenza sia quasi certa (passando eventualmente a una sottosuccessione) e si procede per induzione sulla dimensione  $d$ .

Se  $d = 1$  la prova è facile: possiamo considerare una partizione  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  di elementi di  $\mathcal{F}_0$ , dove

$$\Omega_1 = \left\{ \omega : \liminf_{n \rightarrow \infty} H_n(\omega) \in \mathbb{R} \right\}, \quad \Omega_2 = \left\{ \omega : \liminf_{n \rightarrow \infty} H_n(\omega) = \pm\infty \right\}$$

e notiamo che  $\{X \neq 0\} \subset \Omega_1$ . Con il procedimento del Lemma 2.4.1, nell'insieme  $\Omega_1$  si può ottenere  $\tilde{H}_k \rightarrow H$  ( $\mathcal{F}_0$ -misurabile) e su  $\Omega_2$  possiamo definire ad esempio  $H(\omega) = 0$ , ed abbiamo ottenuto il risultato.

Passiamo ora a dimensione  $d$ , e sia questa volta

$$\Omega_1 = \left\{ \omega : \underline{H}(\omega) = \liminf_{n \rightarrow \infty} |H_n(\omega)| < \infty \right\}$$

Se  $\mathbf{P}(\Omega_1) = 1$ , si procede con il Lemma 2.4.2 e la dimostrazione è completa. In caso contrario sia  $\Omega_2$  l'insieme non trascurabile

$$\Omega_2 = \left\{ \omega : \underline{H}(\omega) = +\infty \right\}$$

e definiamo su questo insieme  $G_n = \frac{H_n}{|H_n|}$  e notiamo che  $G_n \cdot X \rightarrow 0$ . Con il procedimento del Lemma 2.4.2, otteniamo  $\tilde{G}_n \rightarrow \tilde{G}$  e quindi  $\tilde{G} \cdot X = 0$ ; notiamo però che  $|\tilde{G}| = 1$ . Possiamo così effettuare una partizione dell'insieme  $\Omega_2$  in insiemi  $\mathcal{F}_0$ -misurabili  $\Omega_{2,i}$  tali che su  $\Omega_{2,i}$  sia  $0 \neq \tilde{G}^i$  (la componente  $i$ -esima di  $\tilde{G}$ ). Definiamo sull'insieme  $\Omega_{2,i}$ ,

$$\bar{H}_n = H_n - \left( \frac{H_n^i}{\tilde{G}_i} \right) \tilde{G}$$

e notiamo che su  $\Omega_{2,i}$  vale  $\overline{H}_n \cdot X = H_n \cdot X$ : ma su questo insieme  $\overline{H}_n^i = 0$  e quindi ci riduciamo di una dimensione. Quindi con un numero finito di passaggi si ottiene il risultato.

Occorre ora passare a un generico  $N$ , supponendo che la tesi sia vera per  $N - 1$ . Si tratta di provare che, se

$$\sum_{k=1}^N H_{n,k} \cdot \Delta \tilde{S}_k \rightarrow Y$$

si può scrivere  $Y = \sum_{k=1}^N H_k \cdot \Delta \tilde{S}_k$ . Con lo stesso argomento di cui sopra si può far convergere il primo termine  $H_{n,1} \cdot \Delta \tilde{S}_1$  e ci si riduce quindi a  $(N - 1)$ , dove l'affermazione è vera per ipotesi d'induzione.  $\square$

*Dimostrazione del punto b).* Limitiamoci al caso  $N = 1$  (ma  $d$  qualsiasi). Indicando di nuovo  $X = \Delta \tilde{S}_1$ , si tratta di provare che se  $H_n \cdot X - Y_n \rightarrow Z$  (con  $Y_n \leq 0$ ), esistono  $H \mathcal{F}_0$ -misurabile e  $Y \leq 0$  tali che  $H \cdot X - Y = Z$ .

Di nuovo consideriamo

$$\Omega_1 = \{ \omega : \underline{H}(\omega) = \liminf_{n \rightarrow \infty} |H_n(\omega)| < \infty \}$$

e se  $\mathbf{P}(\Omega_1) = 1$  si procede considerando  $\tilde{H}_n$  convergente. Se invece  $\mathbf{P}(\Omega_1) < 1$ , consideriamo sull'insieme  $\Omega_2 = \Omega_1^c$  le variabili

$$G_n = \frac{H_n}{|H_n|} \quad \text{e} \quad \frac{Y_n}{|H_n|}$$

Si può ottenere una successione  $\tilde{G}_n$  convergente a  $\tilde{G}$  e tale che

$$\tilde{G}_n \cdot X - \frac{\tilde{Y}_n}{|\tilde{H}_n|} \rightarrow 0$$

Poichè  $\tilde{G}_n \cdot X \rightarrow \tilde{G} \cdot X$ , segue che  $\frac{\tilde{Y}_n}{|\tilde{H}_n|}$  è limitata, e applicando di nuovo il procedimento si può fare in modo che  $\frac{\tilde{Y}_n}{|\tilde{H}_n|}$  converga a  $W$ . Si ha così  $\tilde{G} \cdot X - W = 0$ , ma  $W$  è a valori positivi e per l'ipotesi di assenza di arbitraggio necessariamente  $W = 0$  e  $\tilde{G} \cdot X = 0$ . Allora si procede come nella dimostrazione precedente.  $\square$



# Capitolo 3

## Valutazione di opzioni in modelli a tempi continui.

### 3.1 Il modello di Samuelson-Black-Scholes

Diamo per scontata la conoscenza dell'integrale stocastico secondo Ito rispetto ad un *processo di Wiener* (o Moto Browniano standard)  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  adattato a una filtrazione  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  (supponiamo  $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ ), fissiamo solo le notazioni.

Indichiamo  $\mathcal{M}^2$  (o  $\mathcal{M}_{[0,T]}^{2,W}$  se c'è possibilità di ambiguità) l'insieme dei processi *progressivamente misurabili*  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  tali che  $\mathbf{E}[\int_0^T H_s^2 ds] < +\infty$  (con la norma evidente) e, se  $1 \leq p < +\infty$ , con  $\Lambda^p$  l'insieme dei processi progressivamente misurabili tali che  $\int_0^T |H_s(\omega)|^p ds < +\infty$  q.c.

Se  $H \in \mathcal{M}^2$  è definito l'*integrale stocastico*  $\int_0^t H_s dW_s$  ed è una *martingala di quadrato integrabile*, e se  $H \in \Lambda^2$  l'integrale stocastico è solamente una *martingala locale*.

Chiamiamo "*Processo di Ito*" un processo stocastico che si possa scrivere nella forma  $X_t = X_0 + \int_0^t H_s dW_s + \int_0^t K_s ds$  con  $H \in \Lambda^2$  e  $K \in \Lambda^1$  (è ben noto che tale decomposizione è univocamente determinata) e, preso un altro processo progressivamente misurabile  $(L_s)_{0 \leq s \leq T}$  si può definire

$$\int_0^t L_s dX_s = \int_0^t (L_s H_s) dW_s + \int_0^t (L_s K_s) ds$$

(a patto che  $(L_s H_s)$  appartenga a  $\Lambda^2$  e  $(L_s K_s)$  appartenga a  $\Lambda^1$ ).

Usiamo la notazione  $[X]_t$  per indicare la *variazione quadratica* del processo stocastico  $(X_t)_{t \geq 0}$  (se esiste) e ricordiamo che, se  $X$  è un processo di Ito con la decomposizione sopra indicata, si ha  $[X]_t = X_0^2 + \int_0^t H_s^2 ds$  (talvolta

scriviamo, con notazione differenziale  $d[X]_t = H_t^2 dt$ ) e ricordiamo che la *covarianza quadratica*  $[X, Y]_t$  è definita da  $[X, Y]_t = \frac{[X+Y]_t - [X]_t - [Y]_t}{2}$ . Alcuni testi preferiscono per la variazione quadratica la notazione  $\langle X \rangle_t$  (in realtà  $[X]_t$  e  $\langle X \rangle_t$  coincidono se il processo  $X_t$  è a traiettorie continue ma sono diversi se il processo ha traiettorie solamente continue a destra).

Ricordiamo, senza dimostrazione ed in *forma differenziale* la **Formula di Ito**: se  $(X_t^1, \dots, X_t^d)$  sono processi di Ito e  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  è di classe  $C^2$ , si ha

$$dF(X_t^1, \dots, X_t^d) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_t^1, \dots, X_t^d) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\dots) d[X^i, X^j]_t$$

Fatte queste premesse, possiamo parlare del modello introdotto da Samuelson (e poi sviluppato da Black e Scholes), nel quale è presente un *attivo senza rischio*  $S_t^0$  (indicato talvolta  $B_t$ ) definito da  $S_t^0 = e^{rt}$  (cioè la somma 1 rivalutata al tasso di interesse differenziale continuamente composto  $r$ ), e accanto a questo un *attivo con rischio*  $S_t$  che è soluzione dell'equazione  $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ . Esaminiamo più in generale l'equazione sopra scritta, che incontreremo parecchie volte.

**Proposizione 3.1.1.** *Siano  $H_t \in \Lambda^2$  e  $K_t \in \Lambda^1$  ed  $x_0$  una costante positiva: l'equazione*

$$dX_t = X_t(K_t dt + H_t dW_t) \quad X_0 = x_0$$

*ammette una ed una sola soluzione data da*

$$X_t = x_0 \exp \left( \int_0^t H_s dW_s + \int_0^t \left( K_s - \frac{H_s^2}{2} \right) ds \right)$$

*Dimostrazione.* Procediamo euristicamente supponendo che la soluzione  $X_t$  esista e sia a valori positivi (naturalmente se  $x_0 > 0$ ) e poniamo  $Y_t = \log X_t$ : applicando la formula di Ito si trova che l'equazione soddisfatta da  $(Y_t)$  è

$$dY_t = X_t^{-1} dX_t - \frac{1}{2} X_t^{-2} d[X]_t = H_t dW_t + \left( K_t - \frac{H_t^2}{2} \right) dt$$

la cui soluzione è evidente. Definiamo allora

$$X_t = x_0 \exp \left( \int_0^t H_s dW_s + \int_0^t \left( K_s - \frac{H_s^2}{2} \right) ds \right)$$

ed è facile verificare che questa risolve l'equazione.

Rimane il problema dell'unicità. Questa può derivare da risultati più generali ma ci possiamo arrivare facilmente in modo diretto: poniamo infatti

$$Z_t = \exp \left( - \int_0^t H_s dW_s - \int_0^t \left( K_s - \frac{H_s^2}{2} \right) ds \right)$$

e sia  $X_t$  una generica soluzione dell'equazione: si prova facilmente che si ha  $d(X_t Z_t) = 0$  e da qui segue  $X_t = x_0 Z_t^{-1}$ .  $\square$

**Osservazione 3.1.2.** Supponiamo che  $H_t$  e  $K_t$ , anziché processi stocastici, siano due funzioni di  $h(t)$  e  $k(t)$  (rispettivamente di quadrato integrabile ed integrabile): allora

$$\int_0^t h(s) dW_s + \int_0^t \left( k(s) - \frac{h^2(s)}{2} \right) ds$$

è una variabile *gaussiana* (con media  $\int_0^t \left( k(s) - \frac{h^2(s)}{2} \right) ds$  e varianza  $\int_0^t h^2(s) ds$ ), e di conseguenza  $\exp \left( \int_0^t h(s) dW_s + \int_0^t \left( k(s) - \frac{h^2(s)}{2} \right) ds \right)$  è una variabile *lognormale*. Si chiama infatti variabile *lognormale* (di parametri  $m$  e  $\sigma^2$ ) una variabile  $Y$  che ha la legge di  $e^X$  dove  $X$  è gaussiana  $N(m, \sigma^2)$ .

Quando  $H_t$  e  $K_t$  sono funzioni della sola variabile  $t$  (si dice anche “*sono deterministici*”), diremo che il processo  $X_t$  soluzione dell'equazione 3.1.1 forma un modello lognormale.

**Osservazione 3.1.3.** Abbiamo visto che un processo  $X_t$  con  $X_0 > 0$  che soddisfa l'equazione della proposizione 3.1.1 è sempre strettamente positivo: vale anche il viceversa. Più precisamente un processo di Ito a valori strettamente positivi soddisfa un'equazione stocastica del tipo sopra scritto. Si ha infatti

$$dX_t = K_t dt + H_t dW_t = X_t \left( \frac{K_t}{X_t} dt + \frac{H_t}{X_t} dW_t \right)$$

L'unica cosa non evidente è che  $\frac{H_t}{X_t} \in \Lambda^2$  e  $\frac{K_t}{X_t} \in \Lambda^1$ : ma poiché le traiettorie di  $X$  sono continue e strettamente positive, per ogni  $\omega \in \Omega$  esistono due costanti positive  $a(\omega)$  e  $A(\omega)$  tali che  $0 < a(\omega) \leq X(t, \omega) \leq A(\omega) < +\infty$  e ne segue facilmente la proprietà cercata.

Torniamo al modello di S.B.S. Il processo  $S_t$  ha l'espressione  $S_t = S_0 \exp \left( \sigma W_t + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right)$ : questo processo è chiamato *Moto Browniano Geometrico* e la costante  $\sigma$  è chiamata *volatilità*.

**Definizione 3.1.4.** Si chiama **strategia di portafoglio** una coppia  $(H_t^0, H_t)$  di processi stocastici progressivamente misurabili; il *valore del portafoglio* al tempo  $t$  è dato da  $V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_t^0 e^{rt} + H_t S_t$ .

Naturalmente  $H_t^0$  e  $H_t$  indicano rispettivamente le quantità di attivo senza rischio e con rischio possedute all'istante  $t$ .

**Definizione 3.1.5.** Il portafoglio è detto **autofinanziato** se è soddisfatta l'equazione  $dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t$ , cioè se si ha

$$V_t = V_0 + \int_0^t H_s^0 dS_s^0 + \int_0^t H_s dS_s$$

Naturalmente è sottinteso nella definizione che i due processi  $H^0$  e  $H$  sono tali che gli integrali  $\int_0^t H_s^0 dS_s^0$  e  $\int_0^t H_s dS_s$  abbiano senso.

In modo analogo a quanto fatto a tempi discreti, se  $X$  è un attivo aleatorio (al tempo  $t$ ) il suo valore *attualizzato* è dato da  $\tilde{X} = \frac{X}{S_t^0} = e^{-rt} X$ . Il risultato che segue, analogo di quello dimostrato a tempi discreti, viene enunciato in forma *differenziale*.

**Proposizione 3.1.6.** *Sono equivalenti le due seguenti proprietà:*

- a)  $dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t$
- b)  $d\tilde{V}_t = H_t d\tilde{S}_t$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è una facile conseguenza della formula di Ito: supponiamo infatti che valga a), allora si ha

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}V_t) &= e^{-rt}(H_t^0 re^{rt}dt + H_t dS_t) - re^{-rt}(H_t^0 e^{rt} + H_t S_t)dt = \\ &= H_t(e^{-rt}dS_t - re^{-rt}S_t dt) = H_t d\tilde{S}_t \end{aligned}$$

e si ottiene b); viceversa se vale b) ripetendo i conti in senso contrario si ottiene a).  $\square$

**Proposizione 3.1.7.** *Assegnato un capitale iniziale  $V_0$  ed un processo progressivamente misurabile  $(H_t)$  (tale che  $\int_0^t H_s dS_s$  sia ben definito), esiste uno ed un solo  $(H_t^0)$  progressivamente misurabile tale che  $(H_t^0, H_t)$  sia una strategia autofinanziata.*

*Dimostrazione.* Supponendo che  $(H_t^0)_t$  esista, si deve avere  $H_t^0 + H_t \tilde{S}_t = V_0 + \int_0^t H_s d\tilde{S}_s$ . Quindi è sufficiente definire  $H_t^0 = V_0 + \int_0^t H_s d\tilde{S}_s - H_t \tilde{S}_t$ .  $\square$

Torniamo al modello di S.B.S. : l'equazione soddisfatta da  $\tilde{S}_t$  è

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dW_t) = \tilde{S}_t \sigma d\left(W_t + \int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) ds\right)$$

Chiamiamo  $W_t^* = W_t + \int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) ds$ , e l'equazione diventa  $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t^*$ .

Dato un processo stocastico  $X_t$ , indichiamo con  $(\mathcal{F}_t^X)_{0 \leq t \leq T}$  la più piccola *filtrazione* che rende  $(X_t)$  un processo adattato (cioè  $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$  opportunamente completata e resa continua a destra).

**Osservazione 3.1.8.** Per ogni  $t$  si ha  $\mathcal{F}_t^S = \mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_t^{W^*}$  (più precisamente coincidono le filtrazioni generate dai tre processi  $W_t, W_t^*, S_t$ ).

La verifica è immediata e non entriamo nei dettagli, tuttavia occorre insistere sul fatto che l'eguaglianza sopra scritta è *fondamentale*.

Nei modelli a tempi finiti, l'esistenza di probabilità martingala equivalenti e la completezza del mercato sono stati dimostrati con risultati essenzialmente di analisi funzionale, nei modelli a tempi continui tipo S.B.S. (e più in generale nei modelli tipo diffusione, come vedremo più avanti nei modelli per i tassi d'interesse) sono invece conseguenza di due risultati fondamentali dell'integrazione stocastica: il *teorema di Girsanov* ed il *teorema di rappresentazione delle martingale nella filtrazione Browniana*. I risultati che seguono vengono enunciati per il momento nel modello S.B.S., ma non sarà difficile estenderli a modelli più generali.

**Teorema 3.1.9.** *Sia  $\mathbf{P}^*$  la probabilità definita da*

$$\frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{P}} = \exp\left(-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2T\right)$$

*sotto questa nuova probabilità il processo  $(\tilde{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$  è una martingala.*

Poiché vale l'equazione  $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t^*$ , è sufficiente provare che  $W_t^*$  è un  $\mathbf{P}^*$ -processo di Wiener e questo è una conseguenza immediata del teorema di Girsanov. In casi più generali, l'unica difficoltà sarà provare che, se  $L_T$  è la formula per la *candidata densità*  $\frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{P}}$ , valga  $\mathbf{E}[L_T] = 1$  (in questo caso la verifica è immediata). Useremo la notazione  $\mathbf{E}^*$  per indicare la speranza fatta rispetto alla probabilità  $\mathbf{P}^*$ .

Il risultato che segue sarà vero più in generale a patto che sia soddisfatta l'eguaglianza  $\mathcal{F}_t^S = \mathcal{F}_t^{W^*}$ .

**Teorema 3.1.10.** *Sia  $X$  un attivo aleatorio al tempo  $T$ , di quadrato integrabile rispetto a  $\mathbf{P}^*$ : esiste uno ed uno solo portafoglio replicante il cui valore al tempo  $t$  è*

$$V_t = \mathbf{E}^*\left[\frac{X}{e^{r(T-t)}} \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

*ed in particolare il prezzo di non arbitraggio  $V_0$  è dato da  $\mathbf{E}^*[\tilde{X}]$ .*

*Dimostrazione.* Per il teorema di rappresentazione delle martingale rispetto alla filtrazione browniana, si ha  $\tilde{X} = \mathbf{E}^*[\tilde{X}] + \int_0^T H_s^* dW_s^*$ , e di conseguenza

$$\tilde{V}_T = V_0 + \int_0^T H_s^* dW_s^* = V_0 + \int_0^T \frac{H_s^*}{\sigma \tilde{S}_s} d\tilde{S}_s$$

Di conseguenza

$$\tilde{V}_t = \mathbf{E}^*[\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^*\left[\frac{X}{e^{rT}} | \mathcal{F}_t\right]$$

L'unicità della strategia di portafoglio deriva dall'unicità del processo integrando nel risultato di rappresentazione delle v.a. di quadrato integrabile nella filtrazione Browniana.  $\square$

Si pongono a questo punto due problemi:

- il calcolo esplicito del *prezzo di non arbitraggio*  $V_0$
- il calcolo effettivo della *strategia di portafoglio*  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ .

### 3.2 Le formule di Black-Scholes

Se l'attivo aleatorio  $X$  è della forma  $X = f(S_T)$  (con  $f$  boreliana), nel modello di S.B.S. i due problemi precedenti hanno una soluzione esplicita.

**Teorema 3.2.1.** *Se  $X = f(S_T)$  (con  $f$  boreliana tale che  $X \in L^2(\mathbf{P}^*)$ ), il valore del portafoglio replicante  $V_t$  è della forma  $V_t = F(t, S_t)$  dove*

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y}) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

Inoltre, se  $F$  è  $C^1$  in  $t$  e  $C^2$  in  $x$ , si ha  $H_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t)$ .

*Dimostrazione.* Partiamo dall'eguaglianza

$$S_T = S_t \cdot \exp\left(\sigma(W_T^* - W_t^*) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)\right)$$

ne segue l'eguaglianza

$$V_t = e^{-r(T-t)} \mathbf{E}^*[f(S_t \cdot \exp(\dots)) | \mathcal{F}_t] = F(t, S_t)$$

dove

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbf{E}^*\left[f\left(x \exp\left(\sigma(W_T^* - W_t^*) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)\right)\right)\right]$$

Notiamo allora che la variabile entro il termine  $\exp(\dots)$  ha la legge di  $\sigma\sqrt{T-t}Y + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)$  dove  $Y$  è gaussiana standard  $N(0, 1)$  e questo conclude la formula.

Inoltre, applicando la formula di Ito, si ottiene

$$dV_t = (H_t^0 r e^{rt}) dt + H_t dS_t = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, S_t) \sigma^2 S_t^2\right) dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) dS_t$$

e questo prova la seconda affermazione.  $\square$

Il termine  $\frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t)$  è chiamato il “delta” e si parla di *delta hedging*.

Le **formule di Black e Scholes** riguardano il caso particolare delle opzioni *call* e *put*; in esse con  $\Phi$  indichiamo la funzione di ripartizione della variabile  $N(0, 1)$ .

**Teorema 3.2.2.** *Il valore al tempo  $t$  delle opzioni call e put (con prezzo strike  $K$ ) è dato da  $C_t = C(t, S_t)$  e  $P_t = P(t, S_t)$  secondo le formule*

$$C(t, x) = x \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$$

$$P(t, x) = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - x \Phi(-d_1)$$

dove

$$d_{1,2} = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Inoltre il “delta” è eguale a  $\Phi(d_1)$  nel caso del call e  $-\Phi(-d_1)$  nel caso del put.

*Dimostrazione.* Facciamo il conto esplicito secondo il teorema 3.2.1, avendo  $f(x) = (x - K)^+$  e ponendo  $\theta = T - t$ : si ha

$$C(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x e^{\sigma\sqrt{\theta}y - \frac{\sigma^2}{2}\theta} - K e^{-r\theta}\right)^+ \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

Notiamo ora che  $(\dots) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -d_2$ , e dunque

$$\begin{aligned} C(t, x) &= \int_{-d_2}^{+\infty} \left(x e^{\sigma\sqrt{\theta}y - \frac{\sigma^2}{2}\theta} - K e^{-r\theta}\right) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy = \\ &= -K e^{-r\theta} \Phi(d_2) + x \int_{-\infty}^{d_2} \frac{e^{-1/2(y-\sigma\sqrt{\theta})^2}}{\sqrt{2\pi}} dy = x \Phi(d_1) - K e^{-r\theta} \Phi(d_2) \end{aligned}$$

La formula per il put si ottiene o con conti analoghi oppure sfruttando la “parità call-put”; quanto al calcolo del “delta” si può ottenere o derivando meccanicamente le formule precedenti oppure derivando sotto il segno d’integrale, tenendo conto del fatto che, quasi ovunque (rispetto alla misura di Lebesgue) vale la formula

$$\frac{d}{dx} (x e^a - b)^+ = e^a I_{\{x e^a > b\}}$$

□

Come si è visto, nelle formule di B.S. il termine  $\mu$  non è rilevante mentre l'unica incognita è la *volatilità*  $\sigma$ : si pone dunque il problema di stimarla. Sostanzialmente si possono usare due metodi:

- **Volatilità storica:** si parte cioè dai dati passati osservati sul mercato. Se si considerano degli istanti di tempo *passati*  $t_1 < t_2 < \dots$  con  $t_i - t_{i-1} = \theta$ , le variabili  $U_i = \log\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right)$  sono indipendenti gaussiane con varianza  $\sigma^2\theta$ : ci si riduce quindi ad un problema di *stima della varianza* in un campione gaussiano con media sconosciuta.
- **Volatilità implicita:** si parte dalle valutazioni delle opzioni call quotate nel mercato e *si invertono le formule B.S.* trovando il valore di  $\sigma$  che restituisce i prezzi osservati.

Nella pratica si osserva che queste due stime non concordano, inoltre la volatilità implicita fornisce valori differenti per tempi diversi e soprattutto per *valori diversi del prezzo strike*  $K$  (questo effetto è chiamato *smile della volatilità*). Questo mostra che il modello S.B.S. in realtà non è adeguato e pone l'esigenza di cercare modelli più realistici.

Prima di andare avanti, parliamo brevemente delle cosiddette **lettere greche**: abbiamo visto che la formula del call è una funzione  $C_t = C(t, T, x, K, r, \sigma)$  e le lettere greche sono le derivate rispetto alle varie componenti. Con calcoli noiosi ma del tutto elementari si arriva a queste formule:

$$\text{Delta: } \frac{\partial C}{\partial x} = \Phi(d_1) > 0$$

$$\text{Vega: } \frac{\partial C}{\partial \sigma} = x \sqrt{T-t} \Phi'(d_1) > 0$$

$$\text{Gamma: } \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\Phi'(d_1)}{x \sigma \sqrt{T-t}} > 0$$

$$\text{Theta: } \frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\sigma x}{r \sqrt{T-t}} \Phi'(d_1) + K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) > 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -r e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) < 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} = \sqrt{T-t} K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) > 0$$

Abbiamo visto sopra che il modello S.B.S. non è adeguato. Una prima generalizzazione consiste nel considerare  $\mu(t)$  e  $\sigma(t)$  dipendenti dal tempo: il primo termine diventa irrilevante (dopo la trasformazione di probabilità col teorema di Girsanov) ed il modello rimane completo e valgono tutti i risultati precedentemente dimostrati. C'è un analogo delle formule di B.S. dove il termine  $\sigma^2(T-t)$  è sostituito da  $\int_t^T \sigma^2(s) ds$  mentre  $\sigma \sqrt{T-t}$  è sostituito da  $\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}$ .

Prima di passare alle successive estensioni del modello, accenniamo brevemente alla modalità attraverso la quale Black e Scholes sono arrivati alle

loro formule. Partendo dall'attivo con rischio  $S_t$  che soddisfa al modello di Samuelson sono arrivati con considerazioni euristiche a formulare le seguenti ipotesi:

- *esiste un portafoglio replicante* della forma  $V_t = F(t, S_t)$  (con  $F$  che sia  $C^1$  in  $t$  e  $C^2$  in  $x$ )
- sotto una nuova probabilità  $\mathbf{P}^*$ ,  $e^{-rt}F(t, S_t)$  è una martingala.

Applicando la formula di Ito si ottiene

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}F(t, S_t)) &= \\ &= e^{-rt} \left( -rF + \frac{\partial F}{\partial t} + rx \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) (t, S_t) dt + e^{-rt} \frac{\partial F}{\partial x} (t, S_t) \sigma S_t dW_t^* \end{aligned}$$

Affinché questo sia una martingala, il termine dentro parentesi  $(\dots)$  si deve annullare: di conseguenza se si trova una soluzione *classica* dell'equazione

$$\begin{cases} -rF + \frac{\partial F}{\partial t} + rx \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \\ F(T, x) = f(x) \quad \text{per } 0 \leq t \leq T, x > 0 \end{cases}$$

allora  $F(t, S_t)$  è il valore del portafoglio replicante e  $\frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) = H_t$  è la strategia replicante. Black e Scholes sono arrivati alle loro formule partendo da una soluzione esplicita dell'equazione sopra scritta (che poi è l'equazione del calore) con  $f(x) = (x - K)^+$  (rispettivamente  $f(x) = (K - x)^+$ ).

### 3.3 I modelli a volatilità locale

Si chiamano “*modelli a volatilità locale*” quei modelli nei quali l'attivo con rischio soddisfa un'equazione della forma

$$dS_t = S_t \left( \mu(t, S_t) dt + \sigma(t, S_t) dW_t \right)$$

(a condizione che  $\mu(\cdot, \cdot)$  e  $\sigma(\cdot, \cdot)$  siano tali che il processo sia ben definito). Di nuovo il termine  $\mu(\cdot, \cdot)$  non è rilevante perché diventa  $r$  passando alla probabilità martingala  $\mathbf{P}^*$  e l'equazione di  $\tilde{S}$  diventa  $d\tilde{S}_t = \sigma(t, S_t) \tilde{S}_t dW_t^*$ .

È facile constatare che si ha  $\mathcal{F}_t^S = \mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_t^{W^*}$  e quindi valgono sostanzialmente tutti i risultati dei paragrafi precedenti, in particolare esiste una ed una sola *probabilità martingala equivalente* ed il modello è *completo*.

Il risultato più rilevante che riguardi questi modelli è stato ottenuto da Dupire nel 1994; enunciamo il risultato senza darne la dimostrazione.

**Proposizione 3.3.1.** *Supponiamo che siano noti i prezzi delle opzioni call  $C(t, K)$  per ogni  $0 \leq t \leq T$  ed ogni  $K > 0$  (e che la funzione  $C(t, x)$  sia  $C^1$  in  $t$  e  $C^2$  in  $x$ ): allora questi prezzi derivano da un modello a volatilità locale dove la funzione  $\sigma(t, x)$  è data dall'espressione*

$$\frac{K^2}{2} \sigma^2(t, K) = \frac{\frac{\partial C(t, K)}{\partial t} + rK \frac{\partial C(t, K)}{\partial K}}{\frac{\partial^2 C(t, K)}{\partial K^2}}$$

Naturalmente non tutti i prezzi saranno esattamente noti e si dovrà ricorrere ad approssimazioni numeriche. Questi modelli hanno buone proprietà matematiche ma non si può sperare di avere formule esplicite trattabili: per affrontarli numericamente si usano i risultati della sezione successiva.

Questi modelli hanno avuto grande successo per qualche anno soprattutto perché sono *completi*, ma attualmente la proprietà di completezza è ritenuta meno rilevante. A parte la definizione matematica, in termini finanziari completezza significa che a patto di saper operare razionalmente sul mercato è possibile eliminare ogni rischio e questo appare adesso poco realistico.

### 3.4 Legami con le equazioni a derivate parziali

Stacciamoci per un momento dai modelli finanziari e consideriamo un processo  $X_t$  che sia soluzione di una equazione differenziale stocastica della forma

$$\begin{cases} dX_t = r X_t dt + \sigma(t, X_t) dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

(naturalmente con  $\sigma(\cdot, \cdot)$  sufficientemente regolare). Consideriamo l'operatore differenziale  $A_t = rx \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x^2 \sigma^2(t, x)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ : vale il seguente risultato

**Lemma 3.4.1.** *Sia  $u(t, x)$  una funzione  $C^1$  in  $t$  e  $C^2$  in  $x$ :*

$$e^{-rt} u(t, X_t) - \int_0^t e^{-rs} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + A_s u - ru \right) (s, X_s) ds$$

è una martingala locale.

*Dimostrazione.* Applichiamo successivamente la formula di Ito partendo da

$$d(e^{-rt} u(t, X_t)) = -re^{-rt} u(t, X_t) dt + e^{-rt} d(u(t, X_t))$$

A sua volta

$$\begin{aligned} d(u(t, X_t)) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial u}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, X_t) d[X]_t = \\ &= \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + rx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2(t, x)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right](t, X_t) dt + \dots dW_t \end{aligned}$$

Notiamo che il termine entro [...] è eguale a  $\frac{\partial u}{\partial t} + A_t u$  e di conseguenza

$$d(e^{-rt}u(t, X_t)) = e^{-rt} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + A_t u - ru \right)(t, X_t) dt + \dots dW_t$$

□

**Corollario 3.4.2.** *Sia  $u(t, x)$  che risolve in senso “classico” l’equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_t u - ru = 0$$

*allora  $e^{-rt}u(t, X_t)$  è una martingala locale.*

Applichiamo questi risultati al calcolo di un’opzione della forma  $X = f(S_T)$  in un modello a volatilità locale come definito nella sezione precedente, e sia  $\mathbf{P}^*$  la probabilità martingala.

**Teorema 3.4.3.** *Supponiamo di avere una soluzione classica dell’equazione*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + rx \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{x^2 \sigma^2(t, x)}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - rF = 0 \\ F(T, x) = f(x) \quad \text{per } 0 \leq t \leq T, x > 0 \end{cases}$$

*e supponiamo che  $e^{-rt} F(t, S_t)$  sia una vera martingala sotto  $\mathbf{P}^*$ : allora il portafoglio replicante è dato da  $V_t = F(t, S_t)$  ed in particolare il prezzo di non arbitraggio è  $V_0 = F(0, S_0)$ .*

*Dimostrazione.* Sostanzialmente la dimostrazione è già completa: si ha infatti

$$e^{-rt}V_t = \tilde{V}_t = \mathbf{E}^* [e^{-rT} F(T, S_T) | \mathcal{F}_t] = e^{-rt} F(t, S_t)$$

□

**Osservazione 3.4.4.** I risultati precedenti (in particolare il Lemma 3.4.1 ed il Corollario 3.4.2) rimangono validi se, anziché una costante  $r$ , si ha una funzione  $r(t, X_t)$  ed il termine  $e^{-rt}$  è sostituito da  $e^{-\int_0^t r(s, X_s) ds}$ : notiamo a questo riguardo che, sinteticamente, si ha

$$d \left( e^{-\int_0^t r(s, X_s) ds} \right) = -r(t, X_t) \cdot e^{-\int_0^t r(s, X_s) ds} \cdot dt$$

Questa osservazione ci sarà utile quando parleremo di modelli per i tassi d’interesse.

### 3.5 I modelli a volatilità stocastica

Si parla di *modello a volatilità stocastica* quando l'attivo con rischio soddisfa una equazione della forma

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t^1)$$

dove  $\mu_t$  e  $\sigma_t$  sono processi stocastici adattati rispetto ad una filtrazione *più grande* di quella generata da  $W^1$  (ma rispetto alla quale  $W_t^1$  è ancora un processo di Wiener). Come sempre il termine  $\mu_t$  non è rilevante e ci si concentra sulla *volatilità*  $\sigma_t$ .

Tipicamente  $\mathcal{F}_t^S \supsetneq \mathcal{F}_t^{W^1}$  e di conseguenza il modello **non è più completo** e non si ha **unicità** della probabilità martingala equivalente.

Un caso molto frequente è quello nel quale  $\sigma_t$  a sua volta segue un'equazione della forma  $d\sigma_t = \alpha(t, \sigma_t) dt + \beta(t, \sigma_t) dW_t^2$  dove  $W^2$  è un altro processo di Wiener e  $W^1$  e  $W^2$  sono *indipendenti* (cioè  $[W^1, W^2]_t = 0$ ) oppure *parzialmente correlati* (cioè  $[W^1, W^2]_t = \rho t$  con  $|\rho| < 1$ ).

**Esempio 3.5.1 (Modello di Stein-Stein).** (Più precisamente Elias S. e Jeremy S., padre e figlio): sintetizziamo questo modello con le equazioni

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu dt + \sigma_t dW_t^1) \\ d\sigma_t = -\delta(\sigma_t - \theta) dt + k dW_t^2 \\ d[W^1, W^2]_t = 0 \end{cases}$$

**Esempio 3.5.2 (Modello di Heston).** Il modello è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu dt + \sqrt{\nu_t} dW_t^1) \\ d\nu_t = k(\theta - \nu_t) dt + \xi \sqrt{\nu_t} dW_t^2 \\ d[W^1, W^2]_t = \rho dt \end{cases}$$

Naturalmente in questo secondo modello si pone il problema di garantire che  $\nu_t$  sia sempre a valori positivi, per il momento tralasciamo questo problema che riprenderemo quando parleremo di modello C.I.R. per i tassi d'interesse.

Consideriamo in generale il caso astratto

$$d\sigma_t = \alpha(t, \sigma_t) dt + \beta(t, \sigma_t) dW_t^2$$

Il *teorema di Girsanov* afferma che tutte le probabilità equivalenti hanno una densità della forma

$$L_T = \exp\left(\int_0^T K_s^1 dW_s^1 + \int_0^T K_s^2 dW_s^2 - \frac{1}{2} \int_0^T ((K_s^1)^2 + K_s^2)^2 ds\right)$$

(naturalmente  $K^1$  e  $K^2$  devono essere tali che gli integrali siano ben definiti e  $\mathbf{E}[L_T] = 1$ ). Affinché  $\widetilde{S}_t$  sia una martingala, si deve avere  $K_t^1 = -\frac{\mu t - r}{\sigma_t}$ , mentre  $K_t^2$  è “libero” (e questo spiega perché non c’è unicità della probabilità martingala equivalente).

Consideriamo una situazione particolarmente semplice, quella cioè nella quale i due processi di Wiener sono indipendenti; si verifica che anche dopo il passaggio ad una probabilità equivalente i due processi di Wiener (modificati) rimangono indipendenti (vedi Osservazione 3.5.3)

Il modo più naturale di costruire due processi di Wiener indipendenti è considerare  $W^i$  su uno spazio  $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbf{P}^i)$  e poi considerare  $\Omega = \Omega^1 \times \Omega^2$  con la probabilità prodotto.

L’equazione di  $S$  diventa

$$dS_t(\omega_1, \omega_2) = S_t(\omega_1, \omega_2) \left( r dt + \sigma_t(\omega_2) dW_t^1(\omega_1) \right)$$

Il prezzo di un “call” all’istante 0 è pertanto

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^* [e^{-rT} (S_T - K)^+] &= \int_{\Omega_2} d\mathbf{P}_2^*(\omega_2) \int_{\Omega_1} \left( S_T(\omega_1, \omega_2) - K \right)^+ e^{-rT} d\mathbf{P}_1^*(\omega_1) = \\ &= \int_{\Omega_2} C_0(S_0, K)(\omega_2) d\mathbf{P}_2^*(\omega_2) \end{aligned}$$

Guardiamo meglio il termine  $C_0(S_0, K)(\omega_2)$ . Fissato  $\omega_2$  come parametro, ci troviamo in un modello tipo S.B.S. con la *volatilità dipendente solo dal tempo*: si ha pertanto

$$C_0(S_0, K)(\omega_2) = S_0 \Phi(d_1(\omega_2)) - K e^{-rT} \Phi(d_2(\omega_2))$$

dove

$$d_{1,2}(\omega_2) = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \int_0^T \left( r \pm \frac{\sigma_s^2(\omega_2)}{2} \right) ds}{\sqrt{\int_0^T \sigma_s^2(\omega_2) ds}}$$

e quindi in definitiva

$$C_0(S_0, K) = S_0 \int_{\Omega_2} \Phi(d_1(\omega_2)) d\mathbf{P}_2^*(\omega_2) - K e^{-rT} \int_{\Omega_2} \Phi(d_2(\omega_2)) d\mathbf{P}_2^*(\omega_2)$$

**Osservazione 3.5.3.** Sappiamo che due processi di Wiener  $W^1$  e  $W^2$  sono indipendenti se  $[W^1, W^2]_t = 0$ : passando ad una probabilità equivalente esistono due processi progressivamente misurabili  $H^1$  e  $H^2$  tali che  $\widetilde{W}_t^i = W_t^i - \int_0^t H_s^i ds$  siano processi di Wiener con la nuova probabilità. Ma la variazione (e quindi la covariazione) quadratica non cambia passando a una probabilità equivalente ed i termini  $\int_0^t H_s^i ds$  non hanno effetto sulla variazione quadratica e pertanto  $[\widetilde{W}^1, \widetilde{W}^2]_t = 0$ .

Per quanto riguarda i modelli a volatilità stocastica, possiamo riassumere brevemente:

- **Vantaggi:** una descrizione più realistica delle incertezze del mercato, con abbandono della condizione di *completezza* che è comoda dal punto di vista matematico ma poco realistica dal punto di vista finanziario.
- **Svantaggi:** minore praticità nei calcoli e non unicità del prezzo di non-arbitraggio (condizione comunque legata alla perdita della completezza).

### 3.6 Il principio del Cambio di Numerario

In questo e nel successivo paragrafo supponiamo che il mercato sia rappresentato, su uno spazio  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , da un *attivo senza rischio*  $S_t^0$  (non necessariamente della forma  $e^{-rt}$ ) e  $d$  *attivi con rischio*  $S_t^i$  che sono modellizzati da processi di Ito a valori strettamente positivi. Una strategia di portafoglio sarà rappresentata dai processi progressivamente misurabili  $(H_t^i)_{0 \leq t \leq T}$  ( $i = 0, \dots, d$ ) tali che gli integrali  $\int_0^t H_s^i dS_s^i$  abbiano senso.

Fino ad ora abbiamo sempre attualizzato rispetto ad  $S_t^0$ , ma come vedremo non è l'unica scelta possibile.

**Definizione 3.6.1.** Si chiama **numerario** un processo stocastico  $D_t$  adattato e a valori strettamente positivi.

Poiché  $D_t$  è strettamente positivo, è possibile considerare i prezzi attualizzati rispetto a questo *numerario*.

**Proposizione 3.6.2.** *Supponiamo che  $(D_t)_{0 \leq t \leq T}$  sia un processo di Ito: la condizione di autofinanziamento è invariante rispetto al cambio di numerario. Più precisamente, posto  $V_t = \sum_{i=0}^d H_t^i S_t^i$ , sono equivalenti:*

$$a) \quad dV_t = \sum_{i=0}^d H_t^i dS_t^i$$

$$b) \quad d\left(\frac{V_t}{D_t}\right) = \sum_{i=0}^d H_t^i d\left(\frac{S_t^i}{D_t}\right)$$

*Dimostrazione.*

$$d\left(\frac{V_t}{D_t}\right) = \frac{1}{D_t} dV_t + V_t d\left(\frac{1}{D_t}\right) + d[V, \frac{1}{D}]_t$$

Supponiamo ora che valga a): questo termine è eguale a

$$\sum_{i=0}^d \left( \frac{H_t^i}{D_t} dS_t^i + H_t^i S_t^i d\left(\frac{1}{D_t}\right) + H_t^i d[S^i, \frac{1}{D}]_t \right) = \sum_{i=0}^d H_t^i d\left(\frac{S_t^i}{D_t}\right)$$

e si ottiene appunto b). Viceversa, partendo da b) e rifacendo i calcoli nell'altro senso si ottiene a).  $\square$

Il risultato veramente importante è il seguente:

**Teorema 3.6.3.** *Supponiamo che esista una probabilità equivalente  $\mathbf{P}^*$  rispetto alla quale ogni  $\frac{S_t^i}{S_t^0}$  sia una martingala, e supponiamo anche che  $\frac{D_t}{S_t^0}$  sia una  $\mathbf{P}^*$ -martingala: considerata la probabilità  $\mathbf{P}^D$  definita da*

$$\frac{d\mathbf{P}^D}{d\mathbf{P}^*} = \frac{D_T}{S_T^0 \cdot D_0}$$

sotto  $\mathbf{P}^D$  ogni  $\frac{S_t^i}{D_t}$  è una martingala.

*Dimostrazione.* Chiamiamo  $L_T = \frac{D_T}{S_T^0 \cdot D_0}$  e sia

$$L_t = \frac{d\mathbf{P}^D}{d\mathbf{P}^*} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{E}^*[L_T | \mathcal{F}_t] = \frac{D_t}{S_t^0 \cdot D_0}$$

Si verifica senza difficoltà che un processo adattato  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  è una  $\mathbf{P}^D$ -martingala se e solo se  $M_t L_t$  è una  $\mathbf{P}^*$ -martingala e questo completa la dimostrazione.  $\square$

**Corollario 3.6.4.** *Indicando con  $\mathbf{E}^D$  la speranza fatta rispetto alla probabilità  $\mathbf{P}^D$ , il prezzo di non arbitraggio al tempo  $t$  di un attivo aleatorio  $X$  è dato da*

$$V_t = S_t^0 \mathbf{E}^* \left[ \frac{X}{S_T^0} \Big| \mathcal{F}_t \right] = D_t \mathbf{E}^D \left[ \frac{X}{D_T} \Big| \mathcal{F}_t \right]$$

**Osservazione 3.6.5.** Il vantaggio di utilizzare come numerario uno degli attivi  $S_t^i$  è che, nel calcolare la strategia di copertura, è sufficiente calcolare i termini  $H_t^j$  con  $j \neq i$  ed il termine  $H_t^i$  è *determinato dalla condizione di autofinanziamento*.

## 3.7 Esempi di utilizzo del Cambio di Numerario

Prima di affrontare gli esempi, facciamo un conto preliminare. Supponiamo che  $S$  risolva l'equazione  $dS_t = S_t (K_t dt + H_t dW_t)$ : allora

$$\frac{1}{S_t} = \frac{1}{S_0} \exp \left( \int_0^t \left( -K_s + \frac{H_s^2}{2} \right) ds - \int_0^t H_s dW_s \right)$$

e quindi  $\frac{1}{S_t}$  risolve l'equazione

$$d\left(\frac{1}{S_t}\right) = \frac{1}{S_t} \left( (-K_t + H_t^2) dt - H_t dW_t \right) = \frac{1}{S_t} \left( (-K_t + H_t^2) dt + H_t dW_t^* \right)$$

(notiamo infatti che  $W_t^* = -W_t$  è ancora un processo di Wiener).

**Esempio 3.7.1 (Il falso paradosso di Siegel sul tasso di cambio).**

Supponiamo di poter impiegare il denaro con il tasso d'interesse nazionale  $r$  oppure in un altro stato col tasso  $r_f$ : c'è dunque il "bond" nazionale  $B_t = e^{rt}$  oppure quello straniero  $B_t^f = e^{r_f t}$ . Il bond straniero tuttavia è scritto nella valuta straniera e in termini di moneta nazionale deve essere moltiplicato per il "tasso di cambio"  $R_t$ .

Supponiamo che questo tasso segua un'equazione tipo S.B.S.  $dR_t = R_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ . Nel mercato sono pertanto presenti due attivi  $B_t = e^{rt}$  e  $B_t^f = e^{r_f t} R_t$  e sotto la probabilità martingala  $\frac{B_t^f R_t}{B_t} = e^{(r_f - r)t} R_t$  deve essere una martingala, cioè l'equazione di  $R_t$  deve essere

$$dR_t = R_t \left( (r - r_f) dt + \sigma dW_t \right)$$

Ma il tasso di cambio inverso (cioè di passaggio dalla valuta nazionale a quella straniera) è  $R^{-1}$  la cui equazione è

$$d\left(\frac{1}{R_t}\right) = \left(\frac{1}{R_t}\right) \left( (r_f - r + \sigma^2) dt - \sigma dW_t \right)$$

e questo secondo Siegel avrebbe dovuto dar luogo a un paradosso (ci si sarebbe cioè dovuto aspettare il solo termine  $(r_f - r)$ ).

Se si ragiona in termini di cambio di numerario il paradosso si rivela inconsistente: infatti bisogna considerare  $R_t^{-1}$  col numerario  $B_t^f$  (o più precisamente  $D_t = B_t^f R_t$ ). Nella probabilità martingala per questo nuovo numerario devono essere martingale i processi  $\left(\frac{B_t}{B_t^f R_t}, 1\right)$  cioè  $\frac{e^{(r-r_f)t}}{R_t}$  deve essere una martingala e pertanto l'equazione sarà

$$d\left(\frac{1}{R_t}\right) = \left(\frac{1}{R_t}\right) \left( (r_f - r) dt + \sigma dW_t^f \right)$$

**Esempio 3.7.2 (Rivisitazione delle formule di B.S.).** Riprendiamo la formula del prezzo del "call" all'istante 0.

Consideriamo l'insieme  $A = \{S_T > K\}$ : si ha

$$C(0, S_0) = \mathbf{E}^* \left[ \frac{(S_T - K)^+}{e^{rT}} \right] = \mathbf{E}^* \left[ \frac{S_T}{e^{rT}} I_A \right] - K e^{-rT} \mathbf{P}^*(A)$$

Ricordiamo che  $S_T = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T^*\right)$  e a sua volta  $W_T^*$  è eguale in legge a  $\sqrt{T}Y$  dove  $Y$  è gaussiana standard. Notiamo quindi che

$$S_T > K \Leftrightarrow \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T^* > -\log\left(\frac{S_0}{K}\right) \text{ cioè } -Y < \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Si ha pertanto  $\mathbf{P}^*(A) = \Phi(d_2)$ , dove  $d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$

Per quanto riguarda il primo termine, cambiamo il numerario passando al numerario  $S_t$  e ottenendo

$$\mathbf{E}^*\left[\frac{S_T}{e^{rT}} \cdot I_A\right] = S_0 \mathbf{E}^S[1 \cdot I_A] = S_0 \mathbf{P}^S(A)$$

Sotto la probabilità  $\mathbf{P}^S$ , sono martingale i processi  $\left(1, \frac{e^{rt}}{S_t}\right)$ ; l'equazione sotto la probabilità originale di  $\frac{e^{rt}}{S_t}$  è

$$d\left(\frac{e^{rt}}{S_t}\right) = \left(\frac{e^{rt}}{S_t}\right) \left(\left(r - \mu + \sigma^2\right) dt - \sigma dW_t\right)$$

che diventa sotto la probabilità  $\mathbf{P}^S$

$$d\left(\frac{e^{rt}}{S_t}\right) = \left(\frac{e^{rt}}{S_t}\right) \left(0 dt + \sigma dW_t^S\right)$$

Cioè è come se fossimo in un modello S.B.S. però con  $r$  sostituito da  $(r + \sigma^2)$  e si ripete il conto appena fatto (mettendo  $(r + \sigma^2)$  al posto di  $r$ ): si ottiene pertanto  $S_0 \Phi(d_1)$ , dove  $d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$

**Esempio 3.7.3 (Opzione di scambio tra due attivi).** Supponiamo che nel mercato, oltre all'attivo senza rischio  $S_t^0 = e^{rt}$ , siano presenti due attivi con rischio con equazione  $dS_t^i = S_t^i(\mu_i dt + \sigma_i dW_t^i)$  con  $[W^1, W^2]_t = 0$ .

Col numerario  $S_t^0$  sono martingale i tre processi  $\left(1, \frac{S_t^1}{S_t^0}, \frac{S_t^2}{S_t^0}\right)$  e l'equazione di  $S_t^i$  diventa sotto  $\mathbf{P}^*$   $dS_t^i = S_t^i(r dt + \sigma_i d\widetilde{W}_t^i)$ .

In questo mercato consideriamo una "opzione di scambio"  $(S_T^1 - S_T^2)^+$ .

Il mercato è completo perché la filtrazione  $(\mathcal{F}_t^{S^1, S^2})_{0 \leq t \leq T}$  coincide con quella generata da  $(W^1, W^2)$  e vale il teorema di rappresentazione delle martingale anche rispetto a un processo di Wiener vettoriale. Esiste dunque uno ed un solo portafoglio replicante il cui valore all'istante  $t$  è dato da

$$V_t = e^{rt} \mathbf{E}^*\left[\frac{(S_T^1 - S_T^2)^+}{e^{rT}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = S_t^1 \mathbf{E}^{S^1}\left[\left(1 - \frac{S_T^2}{S_T^1}\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

Col numerario  $S_t^1$  sono martingale i processi  $\left(\frac{S_t^0}{S_t^1}, 1, \frac{S_t^2}{S_t^1}\right)$ , ma notiamo che nella formula di  $V_t$  l'attivo senza rischio  $S_t^0$  non compare (e ce ne possiamo

pertanto disinteressare). Sotto la probabilità originale, l'equazione di  $\frac{S_t^2}{S_t^1}$  è

$$d\left(\frac{S_t^2}{S_t^1}\right) = \left(\frac{S_t^2}{S_t^1}\right) \left[ (\dots) dt + \sigma_2 dW_t^2 - \sigma_1 dW_t^1 \right]$$

Il termine  $(\dots)$  non è calcolato perché diventa 0 sotto la probabilità  $\mathbf{P}^{S^1}$  e si verifica facilmente che  $\frac{\sigma_2 dW_t^2 - \sigma_1 dW_t^1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$  è ancora un processo di Wiener e l'equazione di  $\frac{S_t^2}{S_t^1}$ , scritta sotto la probabilità  $\mathbf{P}^{S^1}$  è

$$d\left(\frac{S_t^2}{S_t^1}\right) = \left(\frac{S_t^2}{S_t^1}\right) \left[ \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} dW_t^* \right]$$

Pertanto il processo  $Z_t = \frac{S_t^2}{S_t^1}$  soddisfa un'equazione tipo S.B.S. con  $r = 0$  e  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ : ne segue che

$$V_t = S_t^1 P\left(t, \frac{S_t^2}{S_t^1}\right) \quad \text{con} \quad P(t, x) = P\left(t, T, x, 0, 1, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$$

(dove  $P(.,.)$  è la formula del “put” secondo le equazioni di Black-Scholes).

Ma si può precisare anche il portafoglio replicante, basato sui soli due attivi  $S_t^1$  e  $S_t^2$ : infatti  $(1, Z_t)$  formano un mercato tipo S.B.S. (con  $r = 0$ ) e ponendo  $V_t^* = \frac{V_t}{S_t^1}$  si ha  $V_t^* = H_t^1 + H_t^2 Z_t$ .

Sappiamo che vi è equivalenza tra

$$dV_t = H_t^1 dS_t^1 + H_t^2 dS_t^2 \quad \Leftrightarrow \quad d\left(\frac{V_t}{S_t^1}\right) = H_t^2 d\left(\frac{S_t^2}{S_t^1}\right)$$

Consideriamo allora  $dV_t^* = H_t^2 dZ_t$ : il termine  $H_t^2$  è ricavato dalle formule del “put” nel modello B.S. ed il termine  $H_t^1$  si ottiene dalla condizione di autofinanziamento.

# Capitolo 4

## Modelli per la struttura a termine dei tassi d'interesse.

### 4.1 Generalità sui tassi d'interesse

I modelli per la *struttura a termine dei tassi d'interesse* sono utilizzati in realtà per rappresentare due attività finanziarie abbastanza differenti: i *titoli a reddito fisso* (emessi da nazioni o da società, l'esempio più frequente in Italia è rappresentato dai B.O.T. a breve, cioè senza cedole intermedie) ed il vasto mercato degli scambi interbancari (che trascina l'intero mercato dei mutui).

Per quanto riguarda gli interessi sui movimenti interbancari il termine più usato in letteratura è il tasso LIBOR (da London Inter Bank Offer Rate), ma in Europa nell'uso pratico si considera il tasso EURIBOR: è una media dei tassi ai quali le Società Finanziarie si prestano denaro per brevi periodi (fino ad un anno) che viene pubblicato giornalmente a Bruxelles.

L'elemento di partenza della modellizzazione è il cosiddetto **Zero Coupon Bond**  $B(t, T)$ : un titolo che commercializzato al tempo  $t$  al prezzo  $B(t, T)$  dà diritto al tempo  $T$  alla somma 1.

Si assume che esistano, per  $0 \leq t \leq T \leq T^*$ , i titoli  $B(t, T)$  e si osserva che, fissato  $t$ , c'è buona regolarità della funzione  $T \rightarrow B(t, T)$  (e naturalmente  $B(T, T) = 1$ ), mentre si presentano, fissato  $T$ , forti oscillazioni del valore  $t \rightarrow B(t, T)$  (che verrà pertanto modellizzato come processo stocastico).

Vediamo come si legano gli z.c.b. ai tassi d'interesse, partendo da una **osservazione**: la somma 1 al tempo  $t$  vale  $\frac{1}{B(t, T)}$  al tempo  $T$  (infatti si possono comprare  $\frac{1}{B(t, T)}$  titoli).

Se calcoliamo gli interessi in termini *continuamente composti*, l'interesse medio sul periodo sarà dato da  $\frac{1}{B(t,T)} = e^{Y(t,T)(T-t)}$  e questo porta alla seguente definizione:

**Definizione 4.1.1 (Yield o rendimento).**

$$Y(t, T) = \frac{-\log B(t, T)}{T - t}$$

Se vogliamo calcolare l'interesse in termini lineari (tasso LIBOR) dovremo partire dall'equazione  $\frac{1}{B(t,T)} = 1 + L(t, T)(T - t)$  e si arriva alla seguente:

**Definizione 4.1.2 (Tasso LIBOR).**

$$L(t, T) = \frac{1 - B(t, T)}{B(t, T)(T - t)}$$

A volte il valore di B (o di L) deve essere dedotto, come mostra il seguente esempio:

**Esempio 4.1.3.** Consideriamo una obbligazione biennale di 100 €, con cedola semestrale al 6%, venduta al prezzo di 98 €.

Per calcolare l'interesse annuale medio  $\lambda$  (continuamente composto) sul periodo, consideriamo i diversi flussi di denaro attualizzati in 0: si ottiene l'equazione

$$98 = 3e^{-\lambda/2} + 3e^{-\lambda} + 3e^{-3\lambda/2} + 103e^{-2\lambda}$$

che può essere risolta numericamente.

Vediamo ora quanto rendono tra  $S$  e  $T$  i titoli commercializzati in  $t$  ( $t < S < T$ ): ricordiamo che la somma 1 vale  $\frac{1}{B(t,S)}$  al tempo  $S$  e  $\frac{1}{B(t,T)}$  al tempo  $T$ .

In termini continuamente composti si ha la formula

$$\frac{1}{B(t, S)} \cdot e^{F(t,S,T)(T-S)} = \frac{1}{B(t, T)}$$

che porta alla definizione di **Forward rate**

$$F(t, S, T) = \frac{\log B(t, S) - \log B(t, T)}{T - S}$$

Invece in termini di interessi lineari si ha

$$\frac{1}{B(t, S)} \cdot (1 + L(t, S, T)(T - S)) = \frac{1}{B(t, T)}$$

che porta alla definizione di **Forward LIBOR rate**

$$L(t, S, T) = \frac{B(t, S) - B(t, T)}{B(t, T)(T - S)}$$

Continuo ad usare i termini anglosassoni perché non è facile tradurli in termini italiani di ampio uso e sul lavoro vengono comunque sempre usati i termini inglesi. Più che i tassi futuri come indicati sopra, viene usata una loro forma *differenziale*.

**Definizione 4.1.4 (Istantaneous forward rate).**

$$f(t, T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0^+} F(t, T, T + \Delta T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log B(t, T)$$

**Definizione 4.1.5 (Istantaneous short rate).**

$$r(t) = f(t, t) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0^+} L(t, t + \Delta T)$$

Osserviamo che è equivalente conoscere  $B(., .)$  oppure  $Y(., .)$  oppure  $L(., .)$  oppure  $f(., .)$ : riguardo all'ultimo notiamo che si ha  $B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}$ .

Invece da ognuno di questi si può ricavare  $r(t)$  ma non si può *tornare indietro*, cioè la conoscenza del solo *short rate* non permette di ricavare  $B(t, T)$  (se non all'interno di un modello, come vedremo più avanti).

## 4.2 Proprietà indipendenti dal modello

I principali prodotti derivati sui tassi d'interesse sono i **Cap**, i **Floor** e gli **Swap**.

Cominciamo dai *cap*: questi sono una copertura contro il rialzo degli interessi (visti sempre in termini lineari) in un prestito rateale. Un cap si scompone nella somma di *caplets*.

Sull'intervallo di tempo  $[T_{i-1}, T_i]$ , se il tasso di riferimento è  $R$ , il caplet vale al tempo  $T_i$  la somma  $(T_i - T_{i-1})(L(T_{i-1}, T_i) - R)^+$  (usualmente il tasso è noto in  $T_{i-1}$  ed il pagamento avviene in  $T_i$ ).

Indicando  $\delta = T_i - T_{i-1}$  e omettendo i termini  $T_i$  all'interno di  $B(., .)$  e  $L(., .)$ , si ha:

$$\delta(L - R)^+ = \delta \left( \frac{1 - B}{B\delta} - R \right)^+ = \left( \frac{1}{B} - (1 + \delta R) \right)^+ = \frac{1}{B} (1 - R^* B)^+$$

(dove  $R^* = (1 + \delta R)$ ). Notiamo che la somma  $\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} (1 - R^* B(T_{i-1}, T_i))^+$  al tempo  $T_i$  equivale a  $(1 - R^* B(T_{i-1}, T_i))^+ = R^* (\frac{1}{R^*} - B(T_{i-1}, T_i))^+$  alla data  $T_{i-1}$ . Dunque il calcolo di un caplet equivale ad una **opzione put** ad una data  $T_{i-1}$  **su un bond** di scadenza successiva.

Con passaggi analoghi, un *floorlet* (che è una copertura contro la caduta dei tassi) equivale a  $R^* (B(T_{i-1}, T_i) - \frac{1}{R^*})^+$  alla data  $T_{i-1}$ , cioè ad una **opzione call su un bond** di scadenza successiva.

Infine lo *swap* è uno *scambio tra interessi a tasso fisso  $R$  ed interessi a tasso variabile*: anche questo si decompone nella somma di *swaptlets*.

Lo *swaptlet* sull'intervallo  $[T_{i-1}, T_i]$  vale al tempo  $T_{i-1}$  la somma  $(1 - R^* B(T_{i-1}, T_i))$  che vale, al tempo 0,  $(B(0, T_{i-1}) - R^* B(0, T_i))$ .

Calcoliamo allora il tasso swap equo su un debito con pagamenti ai tempi  $T_i = T_0 + i\delta$  (con  $i = 0, 1, \dots, n$ ): il flusso totale di denaro, valutato in 0, è  $\sum_{i=1}^n B(0, T_{i-1}) - (1 + \delta R) \sum_{i=1}^n B(0, T_i)$ . Il tasso swap sarà equo se questa somma vale 0 e si ottiene allora la formula

$$R = \frac{B(0, T_0) - B(0, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^n B(0, T_i)}$$

cioè il tasso swap equo può essere calcolato con una *formula deterministica* a partire dai tassi sui vari periodi.

Ad esempio una banca che offre un mutuo decennale con rata mensile, a scelta a un tasso variabile legato all'Euribor o a un tasso fisso predefinito, offre uno **swap**, teoricamente calcolabile secondo la formula precedente.

Nella pratica però la formula sopra scritta non è applicabile direttamente per due motivi: il primo e principale è che i tassi Euribor sono pubblicati, giorno per giorno, fino alla durata di un anno mentre uno swap è su periodi molto più lunghi, tipicamente 10 o 15 anni.

Il secondo motivo è che i passaggi precedenti presuppongono che si possa liberamente prestare o investire denaro al tasso Libor per qualsiasi durata e questa è una idealizzazione.

### 4.3 Principi di modellizzazione

La modellizzazione classica parte da uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  sul quale è definita una filtrazione  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  e adattato a questa filtrazione c'è un processo di Wiener  $d$ -dimensionale (non necessariamente  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$ ).

Per ogni  $T$  fissato, si suppone che  $B(t, T)_{0 \leq t \leq T}$  sia un *processo di Ito* rispetto a  $W_t$ .

Come *numerario di riferimento* la convenzione vuole che si usi il processo  $B_t = e^{\int_0^t r(s) ds}$ : questo è chiamato **money account**.

Precisiamo subito che l'attivo finanziario  $B_t$  in realtà *non esiste*: è una idealizzazione volta a modellizzare la somma 1 costantemente rivalutata al tasso d'interesse dei bond a scadenza immediata. Fissiamo un tempo  $T$  e poi  $0 < T_1 < T_1 \cdots < T_n = T$  e investiamo la somma 1 nei bond di scadenza  $T_1$ , poi in quelli di scadenza  $T_2$  e così via .... al tempo  $T$  la somma sarà

$$\frac{1}{B(0, T_1)} \cdot \frac{1}{B(T_1, T_2)} \cdots = \exp \left( \int_0^{T_1} f(0, u) du + \int_{T_1}^{T_2} f(T_1, u) du + \dots \right)$$

Prendendo dei tempi  $T_i$  sempre più fitti (l'ultimo sempre eguale a  $T$ ), al limite si ottiene  $\exp \left( \int_0^T f(u, u) du \right) = B_T$ .

Per formulare qualcosa che richiami l'assenza di arbitraggio, si fa questa **ipotesi di modellizzazione**: esiste una probabilità equivalente  $\mathbf{P}^*$  rispetto alla quale ogni processo  $\left( \frac{B(t, T)}{B_t} \right)_{0 \leq t \leq T}$  sia una *martingala*.

L'idea più immediata è quella di modellizzare ogni bond con una equazione della forma

$$dB(t, T) = B(t, T) \cdot (m(t, T) dt + S(t, T) dW_t)$$

ma questa si rivela una *cattiva idea*: bisogna infatti garantire la regolarità su  $T \rightarrow B(\omega, t, T)$  ma soprattutto bisogna garantire che si abbia  $B(\omega, T, T) = 1$  q.c.

La strada percorsa è stata prima quella di costruire i modelli basati sullo *short rate* e più tardi quelli basati sul *forward rate* (notiamo che in entrambi i casi si tratta di idealizzazioni non direttamente osservabili sul mercato).

Più tardi sono venuti i modelli basati sul tasso Libor (detti anche *modelli di mercato*) ed ulteriori estensioni delle quali daremo conto più avanti, ma torniamo ai precedenti.

Tra i modelli basati sul tasso a breve e quelli basati sul tasso forward c'è una differenza fondamentale: nel primo caso infatti bisogna modellizzare *sia il tasso a breve che la densità della probabilità martingala*, mentre nel secondo caso si modella il tasso forward *in modo tale che esista una probabilità martingala*. Vediamo meglio perché.

Nei modelli basati sul tasso a breve usualmente si considera  $r(t)$  come soluzione di una e.d.s. della forma

$$\begin{cases} dr(t) = \mu(t, r) dt + \sigma(t, r) dW_t \\ r(0) = r^*(0) \end{cases}$$

(sotto la probabilità originale  $\mathbf{P}$ ), dove  $r^*(0)$  è il valore del tasso a breve osservato sul mercato. Tuttavia in questo caso si conosce solo  $B_t = e^{\int_0^t r(s) ds}$  e non ha senso pertanto parlare di probabilità martingala (è come avere un solo attivo e non si possono fare arbitraggi con un solo attivo).

Se fosse nota la probabilità martingala  $\mathbf{P}^*$ , si potrebbe ricavare il prezzo del bond dalla formula

$$B(t, T) = B_t \cdot \mathbf{E}^* \left[ \frac{B(T, T)}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbf{E}^* \left[ e^{-\int_t^T r(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Per completare la modellizzazione, si deve dunque scegliere  $\mathbf{P}^*$  (più spesso la densità  $\frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{P}}$ ). Una volta considerato un modello, chi sceglie  $\mathbf{P}^*$ ? **Il mercato!** Detto così sembra una provocazione, in realtà si fa in modo che i prezzi osservati sul mercato si adattino ai prezzi ricavati dal modello (*calibrazione del modello*).

Spesso si modella direttamente il tasso a breve sotto la probabilità martingala (si chiama *modellizzazione martingala*), tenendo però presente che la probabilità martingala non è una descrizione statistica della realtà ma solo uno *strumento per calcolare dei prezzi*.

Concludiamo osservando che nei modelli basati sul tasso a breve  $W_t$  è sempre unidimensionale ed è *irrisorio* considerare un processo di Wiener a dimensione superiore  $d$ : infatti presi  $W^1$  e  $W^2$  Wiener indipendenti, si ha

$$a W_t^1 + b W_t^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left( \frac{a W_t^1 + b W_t^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

e si verifica facilmente che  $\widetilde{W}_t = \frac{a W_t^1 + b W_t^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  è a sua volta un processo di Wiener.

Più in generale, presi  $H_t^1, H_t^2$  appartenenti a  $\Lambda^2$ , si ha

$$H_t^1 dW_t^1 + H_t^2 dW_t^2 = \sqrt{(H_t^1)^2 + (H_t^2)^2} d\widetilde{W}_t$$

dove il processo stocastico

$$\widetilde{W}_t = \left( \int_0^t \frac{H_s^1}{\sqrt{(H_s^1)^2 + (H_s^2)^2}} dW_s^1 + \frac{H_s^2}{\sqrt{(H_s^1)^2 + (H_s^2)^2}} dW_s^2 \right)$$

è ancora un processo di Wiener.

Nei modelli basati sul tasso forward invece si modella  $f(.,.)$  (sotto la probabilità originale) con una equazione della forma

$$\begin{cases} df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t \\ f(0, T) = f^*(0, T) \end{cases}$$

(dove  $f^*(0, T)$  è il valore del tasso forward osservato sul mercato):  $W_t$  può essere un processo di Wiener di dimensione  $d$  qualsiasi (in alcuni modelli anche infinito-dimensionale).

Nota  $f(\cdot, \cdot)$ , si ottiene  $B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}$  e quindi ha senso chiedersi se esiste una probabilità martingala. La risposta è contenuta nel teorema di Heath-Jarrow-Morton che vedremo più avanti.

## 4.4 Modelli basati sul tasso a breve

Per semplificare le cose, adottiamo il criterio della *modellizzazione martingala* e partiamo da  $r(t)$  che risolve un'equazione della forma

$$dr(t) = \mu(t, r) dt + \sigma(t, r) dW_t$$

Tra i modelli più usati vi sono

- **Vasicek:**  $dr = (b - ar) dt + \sigma dW_t$  ( $a, b > 0$ )
- **C.I.R. :**  $dr = a(b - r) dt + \sigma\sqrt{r} dW_t$
- **Ho-Lee:**  $dr = \theta(t) dt + \sigma dW_t$
- **Hull-White :**  $dr = (\theta(t) - ar) dt + \sigma dW_t$

Nei modelli sopra indicati,  $a, b, \sigma$  sono costanti mentre  $\theta(t)$  è una funzione dipendente solo dal tempo.

Guardiamo più da vicino il **modello di Vasicek**: l'equazione ha una soluzione esplicita.

Se partiamo dall'equazione  $f' = a(m - f)$ ,  $f(0) = c$ , questa ha soluzione  $f(t) = m + (c - m)e^{-at}$ ; notiamo che  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = m$ .

Ispirati da questo facile esempio, cerchiamo la soluzione della equazione stocastica

$$\begin{cases} dX_t = a(m - X_t) dt + b dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

Non è difficile verificare che la soluzione è data da

$$X_t = m + (x_0 - m)e^{-at} + b \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s$$

Di conseguenza il modello di Vasicek ha una soluzione esplicita:

$$r(t) = \frac{b}{a} + \left(r^*(0) - \frac{b}{a}\right) e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s$$

(in particolare ogni  $r(t)$  è una variabile gaussiana).

Notiamo che  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[r(t)] = \frac{b}{a}$  ed il comportamento di convergenza (pur con le oscillazioni dovute alla componente stocastica) è chiamato *mean reversion*: questa proprietà qualche anno fa era ritenuta un elemento importante della modellizzazione, ora lo è molto meno.

Consideriamo il modello **C.I.R.** (cioè Cox-Ingersoll-Ross): alla base di questo modello ci sono i risultati sulle *diffusioni di Feller*. Per dare un senso all'equazione, bisogna garantire che la soluzione sia tale che  $r(\omega, t) > 0$  q.c. Questo avviene con una condizione sui coefficienti, cioè  $ab \geq \frac{\sigma^2}{2}$ ; rimandiamo all'appendice la giustificazione di questa affermazione.

Torniamo a un generico modello basato sul tasso a breve: il primo modo di procedere è stato attraverso equazioni differenziali a derivate parziali, secondo le linee esposte nel capitolo precedente. Ripetendo conti sostanzialmente eguali al Lemma 3.4.1 ed al Corollario 3.4.2, si prova che, presa  $u(t, r)$  derivabile una volta rispetto a  $t$  e due rispetto a  $r$ , il processo

$$e^{-\int_0^t r(s) ds} u(t, r(t)) - \int_0^t e^{-\int_0^s r(u) du} \left( -ru + \frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) (s, r(s)) ds$$

è una martingala locale.

Pertanto, in modo analogo al teorema 3.4.3, se si trova una soluzione *classica* dell'equazione

$$\begin{cases} -ru + \frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0 \\ u(T, r) = f(r) \end{cases}$$

e si prova che il processo sopra indicato è una vera martingala, vale la formula

$$\mathbf{E} \left[ e^{-\int_t^T r(s) ds} f(r(T)) \mid \mathcal{F}_t \right] = u(t, r(t))$$

Di conseguenza si può scrivere  $B(., .)$  nella forma  $B(t, T) = F^T(t, r(t))$  dove  $F$  è soluzione di

$$\begin{cases} -rF^T + \frac{\partial F^T}{\partial t} + \mu \frac{\partial F^T}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} = 0 \\ F^T(T, r) = 1 \quad 0 \leq t \leq T, r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

L'equazione sopra scritta è chiamata "*term structure equation*".

Se si deve valutare il prezzo di una opzione al tempo  $S$  che sia funzione di un bond di scadenza successiva  $T$  (come gli esempi che abbiamo visto nella Sezione 2) si potrà scrivere ad esempio

$$\mathbf{E} \left[ e^{-\int_t^S r(u) du} f(B(S, T)) \mid \mathcal{F}_t \right] = G(t, r(t))$$

dove a sua volta  $G$  risolve l'equazione

$$\begin{cases} -rG + \frac{\partial G}{\partial t} + \mu \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = 0 \\ G(S, r) = f(F^T(S, r)) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq S, \quad r \in \mathbb{R}$$

Solo alcune volte le equazioni sopra scritte hanno una soluzione esplicita, negli altri casi si procede numericamente.

Questo modo di procedere è chiaramente molto macchinoso; un deciso passo avanti è stato ottenuto con la nozione di “*struttura a termine affine*” introdotta da Duffie e Kan nel 1996.

**Definizione 4.4.1.** Si dice che il modello possiede una **struttura a termine affine** (A.T.S.) se si può scrivere

$$B(t, T) = \exp(a(t, T) - b(t, T) r(t))$$

dove  $a(\cdot, \cdot)$  e  $b(\cdot, \cdot)$  sono funzioni deterministiche con  $a(T, T) = b(T, T) = 0$ .

Il risultato principale è il seguente

**Teorema 4.4.2 (Duffie-Kan).** *Supponiamo che, sotto la probabilità martingala, il tasso a breve soddisfi un'equazione della forma  $dr(t) = \mu(r, t) dt + \sigma(t, r) dW_t$ , dove  $\mu$  e  $\sigma$  sono della forma*

$$\mu(t, r) = \alpha(t)r + \beta(t) \quad \sigma(t, r) = \sqrt{\gamma(t)r + \delta(t)}$$

con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  funzioni continue: allora il modello ha una **A.T.S.** dove le funzioni  $a$  e  $b$  sono soluzione delle equazioni

$$\begin{cases} b_t(t, T) + \alpha(t)b(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)b^2(t, T) = -1 \\ b(T, T) = 0 \\ a_t(t, T) = \beta(t)b(t, T) - \frac{1}{2}\delta(t)b^2(t, T) \\ a(T, T) = 0 \end{cases}$$

Notiamo che la prima è una *equazione differenziale di Riccati* (della quale a volte si conosce la soluzione esplicita) mentre la seconda è una normale equazione.

**Idea della dimostrazione:** si cerca una soluzione della *term structure equation* che sia della forma  $F^T(t, r) = \exp(a(t, T) - b(t, T)r)$ . Con dei calcoli tediosi ma del tutto elementari si ottiene

$$\exp(\dots) \left\{ (\dots) + r (\dots) \right\} = 0$$

Eguagliando a 0 i termini contenuti entro le due parentesi si ottengono esattamente la seconda e la prima equazione dell'enunciato del teorema.

Consideriamo un modello dotato di A.T.S. direttamente sotto la probabilità martingala: abbiamo  $B(t, T) = \exp(a(t, T) - b(t, T)r(t))$ .

L'equazione soddisfatta da  $B(t, T)$  è

$$dB(t, T) = B(t, T) \left( (\dots) dt - b(t, T) \sigma(t, r(t)) dW_t \right)$$

Non è calcolato il termine dentro parentesi perchè  $\frac{B(t, T)}{B_t}$  è una martingala: allora, come abbiamo visto nel capitolo precedente, il termine  $(\dots)$  deve essere eguale a  $r(t)$ . L'equazione soddisfatta da  $B(t, T)$  è pertanto

$$dB(t, T) = B(t, T) \left( r(t) dt - b(t, T) \sigma(t, r(t)) dW_t \right)$$

#### Esempio 4.4.3 (Modello di Vasicek).

In questo caso i conti sono molto semplici: impostiamo le due equazioni

$$\begin{cases} b_t(t, T) - a b(t, T) = -1 \\ b(T, T) = 0 \\ a_t(t, T) = b(t, T) - \frac{\sigma^2}{2} b^2(t, T) \\ a(T, T) = 0 \end{cases}$$

La prima è una equazione differenziale lineare e la seconda una semplice eguaglianza: la soluzione è molto facile e si ha  $b(t, T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$  e  $a(t, T) = \frac{\sigma^2}{2} \int_t^T b^2(s, T) ds - b \int_t^T b(s, T) ds$ .

#### Esempio 4.4.4 (Modello C.I.R.).

Scriviamo le due equazioni:

$$\begin{cases} b_t(t, T) - a b(t, T) - \frac{\sigma^2}{2} b^2(t, T) = -1 \\ b(T, T) = 0 \\ a_t(t, T) = b b(t, T) \\ a(T, T) = 0 \end{cases}$$

La prima è una *equazione differenziale di Riccati*: di queste equazioni spesso (come in questo caso) si può scrivere la soluzione esplicita facendo intervenire le *funzioni speciali*. Diamo per buona la soluzione sorvolando sui conti piuttosto complessi: se si pone  $\gamma = \frac{\sqrt{a^2 + \sigma^2}}{2}$ , si ha

$$b(t, T) = \frac{\sinh(\gamma(T-t))}{\gamma \cosh(\gamma(T-t)) + \frac{a}{2} \sinh(\gamma(T-t))}$$

$$a(t, T) = \frac{2b}{\sigma^2} \log \left\{ \frac{\gamma e^{a(T-t)^2}}{\gamma \cosh(\gamma(T-t)) + \frac{a}{2} \sinh(\gamma(T-t))} \right\}$$

Abbiamo visto in questi esempi che l'idea della A.T.S. permette di evitare il passaggio delle equazioni differenziali a derivate parziali per poter scrivere  $B(t, T) = F^T(t, r(t))$ ; queste equazioni sono sostituite da equazioni differenziali ordinarie a volte di agevole soluzione.

Se però si vuole calcolare il prezzo di una opzione, al tempo  $S$ , della forma  $f(B(S, T))$ , bisogna tornare ad usare le equazioni a derivate parziali. Vedremo più avanti che un deciso miglioramento si può ottenere utilizzando il *principio del cambio di numerario*.

## 4.5 Completezza del modello e inversione della curva dei rendimenti

In un modello basato sul tasso a breve, se consideriamo un attivo aleatorio al tempo  $S$ , rappresentato da una v.a.  $\mathcal{F}_S$  misurabile (spesso della forma  $f(B(S, T))$  dove  $S < T$ ), ci domandiamo se esiste un portafoglio replicante. In un modello dotato di A.T.S. l'equazione soddisfatta da  $\tilde{B}(t, T) = \frac{B(t, T)}{B_t}$  è della forma

$$d\tilde{B}(t, T) = \tilde{B}(t, T) \left( -b(t, T) \sigma(t, r(t)) dW_t \right) = \tilde{B}(t, T) \lambda(t, r(t)) dW_t$$

ed è immediato constatare che  $\mathcal{F}_S^W = \mathcal{F}_S^{\tilde{B}(\cdot, T)}$ : si possono sostanzialmente ripetere le argomentazioni svolte nel capitolo precedente e si vede che questo attivo aleatorio è replicabile con un portafoglio basato due attivi, il *money account* ed un bond di una (qualsiasi) scadenza posteriore  $T$ .

Questo è perfettamente rigoroso dal punto di vista matematico, ma dal punto di vista finanziario è talvolta insensato: una opzione a tre mesi su un bond di scadenza sei mesi potrebbe essere replicato da un portafoglio composto dal money account (che è solo una idealizzazione) e da un bond di scadenza 5 anni!

Vedremo più avanti, utilizzando il principio del cambio di numerario, esempi di portafogli di copertura molto più concreti e ragionevoli in termini finanziari.

Il problema della **inversione della curva dei rendimenti** si pone in questi termini: scelto un modello *short rate* (dipendente da alcuni parametri) e osservato sul mercato il tasso a breve  $r^*(0)$ , si ottiene secondo il modello

il valore  $B(0, T)$  (per ogni  $0 < T < T^*$ ). È possibile calibrare i parametri in modo da avere, per ogni  $T$ ,  $B(0, T) = B^*(0, T)$  (dove  $B^*(0, T)$  è il valore del bond osservato sul mercato)?

Per i modelli dipendenti da due-tre costanti (come *Vasicek* o *C.I.R.*) la risposta è negativa. Per questo sono stati introdotti dei modelli nei quali un parametro è in realtà una funzione, in modo da consentire la piena calibrazione del modello ai dati osservati.

#### Esempio 4.5.1 (Modello di Ho-Lee).

Sinteticamente il modello si scrive  $dr(t) = \theta(t) dt + \sigma dW_t$ : è un modello molto semplice ma che consente l'inversione della curva dei rendimenti. Le equazioni della A.T.S. sono

$$\begin{cases} b_t(t, T) = -1 & \begin{cases} a_t(t, T) = \theta(t) b(t, T) - \frac{\sigma^2}{2} b^2(t, T) \\ a(T, T) = 0 \end{cases} \\ b(T, T) = 0 \end{cases}$$

con soluzione  $b(t, T) = (T - t)$  e  $a(t, T) = \int_t^T \theta(s) (s - T) ds + \frac{\sigma^2}{2} \frac{(T-t)^3}{3}$ .

Per ottenere l'inversione della curva si deve avere

$$a(0, T) - b(0, T) r^*(0) = \log B^*(0, T)$$

o anche

$$a_T(0, T) - b_T(0, T) r^*(0) = -f^*(0, T)$$

Proseguendo coi conti  $-\int_0^T \theta(s) ds + \frac{\sigma^2 T^2}{2} - f^*(0, 0) = -f^*(0, T)$ , cioè

$$\int_0^T \theta(s) ds = f^*(0, T) + \frac{\sigma^2 T^2}{2} - f^*(0, 0)$$

Naturalmente si può ottenere la funzione  $\theta(\cdot)$  (a patto che  $T \rightarrow f^*(0, T)$  sia assolutamente continua).

#### Esempio 4.5.2 (Modello di Hull-White).

Sinteticamente il modello si scrive  $dr(t) = (\theta(t) - ar) dt + \sigma dW_t$ : le equazioni della A.T.S. sono

$$\begin{cases} b_t(t, T) = a b(t, T) - 1 & \begin{cases} a_t(t, T) = \theta(t) b(t, T) - \frac{\sigma^2}{2} b^2(t, T) \\ a(T, T) = 0 \end{cases} \\ b(T, T) = 0 \end{cases}$$

e la loro soluzione è data da

$$b(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) \quad \text{e} \quad a(t, T) = \int_t^T \left( \frac{\sigma^2}{2} b^2(s, T) - \theta(s) b(s, T) \right) ds.$$

Secondo il modello

$$\begin{aligned} f(0, T) &= b_T(0, T) r^*(0) - a_T(0, T) = \\ &= r^*(0) e^{-aT} + \int_0^T e^{-a(T-s)} \theta(s) ds - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 \end{aligned}$$

Vogliamo fare in modo che valga l'eguaglianza  $f(0, T) = f^*(0, T)$ . Un modo di risolvere questo problema è porre  $f^*(0, T) = x(T) - g(T)$ , dove  $g(T) = \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2$ , e  $x(t)$  è soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} x'(t) = -ax(t) + \theta(t) \\ x(0) = r^*(0) \end{cases}$$

Allora  $\theta(T) = x'(T) + ax(T) = f_T^*(0, T) + g'(T) + ax(T) = f_T^*(0, T) - g'(T) + a(f^*(0, T) - g(T))$ .

Come si vede, dunque, il problema ha soluzione a patto che abbia senso scrivere  $f_T^*(0, T)$ , cioè che il prezzo del bond osservato sul mercato  $B^*(0, T)$  sia derivabile due volte.

Nella pratica, siccome sono noti i prezzi dei bond per un numero molto alto (ma finito) di scadenze, e per gli altri valori di  $T$  si deve fare una interpolazione, bisogna scegliere una interpolazione che sia di classe  $C^2$ .

## 4.6 Modelli di deformazione della curva dei tassi

Consideriamo adesso un modello basato sul *forward rate*, cioè un modello nel quale il punto di partenza è  $f(t, T)$  che verifica, sotto una certa probabilità  $\mathbf{P}$ , l'equazione

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t$$

Questa volta il processo di Wiener può essere  $d$ -dimensionale (in alcune estensioni addirittura infinito-dimensionale); per semplicità di notazioni noi lo consideriamo a valori reali ma tutti i risultati rimangono validi se  $\sigma(t, T)$  e  $W_t$  sono a valori in  $\mathbb{R}^d$  (naturalmente bisogna sostituire i prodotti con i prodotti scalari).

Su  $\alpha$  e  $\sigma$  facciamo le seguenti ipotesi: sono definite su  $\Omega \times [0, T^*] \times [0, T^*]$  e misurabili rispetto alla  $\sigma$ -algebra prodotto  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}([0, T^*])$  (dove  $\mathcal{P}$  è la  $\sigma$ -algebra su  $\Omega \times [0, T^*]$  dei processi *progressivamente misurabili*). Il caso più semplice è quando, fissato  $T$ ,  $(\omega, t) \rightarrow \alpha(\omega, t, T)$  è adattato e  $(t, T) \rightarrow \alpha(\omega, t, T)$  è continuo (e analogamente per  $\sigma$ ): negli esempi rientreremo quasi sempre in questo caso.

Per dare un senso agli integrali che useremo occorre anche supporre che si abbia

$$\int_0^{T^*} ds \int_0^s |\alpha(t, s)| dt < +\infty \text{ q.c.} \quad \int_0^{T^*} ds \int_0^s \sigma(t, s)^2 dt < +\infty \text{ q.c.}$$

Nelle dimostrazioni che seguono faremo uso senza problemi di un *teorema di Fubini stocastico*, cioè della possibilità di invertire l'ordine di integrazione

$$\int_0^T \left( \int_0^T H(\omega, t, s) ds \right) dW_t = \int_0^T \left( \int_0^T H(\omega, t, s) dW_t \right) ds$$

Nell'appendice preciseremo meglio sotto quali ipotesi si può applicare questo risultato.

Come abbiamo visto, noto  $f(t, T)$  si può ricavare il bond dalla formula  $B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds}$ . Il risultato principale è il seguente:

**Teorema 4.6.1 (Heath-Jarrow-Morton).** *Il processo stocastico  $\tilde{B}(t, T) = \frac{B(t, T)}{B_t}$  è una martingala, qualunque sia  $T$ , se e solo se vale q.c. l'eguaglianza*

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \cdot \int_t^T \sigma(t, s) ds$$

*Dimostrazione.* Partiamo dalla formula  $B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds} = e^{X_t}$ , dove

$$\begin{aligned} X_t &= \int_t^T (-f(s, s) + f(s, s) - f(t, s)) ds = \\ &= -\int_t^T r(s) ds + \int_t^T \left( \int_t^s \alpha(u, s) du \right) ds + \int_t^T \left( \int_t^s \sigma(u, s) dW_u \right) ds = \\ &= -\int_t^T r(s) ds + \int_t^T \left( \int_u^T \alpha(u, s) ds \right) du + \int_t^T \left( \int_u^T \sigma(u, s) ds \right) dW_u = \\ &= X_0 + \int_0^t r(s) ds - \int_0^t \left( \int_u^T \alpha(u, s) ds \right) du - \int_0^t \left( \int_u^T \sigma(u, s) ds \right) dW_u \end{aligned}$$

Si ha pertanto

$$dX_t = \left( r(t) - \int_t^T \alpha(t, s) ds \right) dt - \left( \int_t^T \sigma(t, s) ds \right) dW_t$$

e quindi  $d[X]_t = \left( \int_t^T \sigma(t, s) ds \right)^2 dt$ . Ne segue

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= e^{X_t} \left( dX_t + \frac{1}{2} d[X]_t \right) = \\ &= B(t, T) \left[ \left( r(t) - \int_t^T \alpha(t, s) ds + \frac{1}{2} \left( \int_t^T \sigma(t, s) ds \right)^2 \right) dt + \dots dW_t \right] \end{aligned}$$

Affinché  $\tilde{B}(t, T)$  sia una martingala, il termine  $(\dots)$  davanti a  $dt$  deve essere eguale a  $r(t)$ , cioè  $\left( -\int_t^T \alpha(t, s) ds + \frac{1}{2} \left( \int_t^T \sigma(t, s) ds \right)^2 \right) = 0$  per ogni  $T$ , e derivando si ottiene proprio l'eguaglianza cercata.  $\square$

Poiché, passando ad una probabilità equivalente,  $W_t + \int_0^t \gamma(s) ds$  è un processo di Wiener (dove  $\gamma(t)$  è un opportuno processo progressivamente misurabile), si ottiene immediatamente il seguente corollario

**Corollario 4.6.2.** *Dato  $f(t, T)$  che soddisfa l'equazione*

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t$$

sotto una probabilità  $\mathbf{P}$ , esiste una probabilità equivalente che rende ogni  $\tilde{B}(t, T)$  una martingala se e solo se esiste un processo  $\gamma(t)$  progressivamente misurabile tale che valga l'eguaglianza

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \cdot \int_t^T \sigma(t, s) ds + \gamma(t) \cdot \sigma(t, T)$$

Come si è visto la dimostrazione è immediata (naturalmente  $\gamma(t)$  non può essere qualsiasi ma deve verificare le condizioni per poter applicare il teorema di Girsanov).

Il **principio di modellizzazione** (direttamente sotto la probabilità martingala) nei modelli basati sul tasso forward è pertanto il seguente:

- si sceglie la *superficie della volatilità*  $\sigma(t, T)$
- si pone  $f(t, T) = f^*(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) dW_s$  (dove  $f^*(0, T)$  è il valore osservato sul mercato)
- di conseguenza  $B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds}$ .

Notiamo che il problema della *inversione della curva dei rendimenti* è automaticamente risolto.

**Esempio 4.6.3.** H.J.M. hanno analizzato questo esempio: a dimensione 2, la scelta della superficie di volatilità è  $\sigma(t, T) = (\sigma_1, \sigma_2 e^{-\lambda(T-t)})$  dove  $\sigma_1, \sigma_2, \lambda$  sono opportune costanti positive.

I tre autori hanno argomentato che, scegliendo opportunamente le tre costanti, si ottiene una buona calibrazione sui prezzi osservati sul mercato.

**Osservazione 4.6.4.** È importante insistere sul fatto che la modellizzazione di H.J.M. non è un modello particolare, ma *un modo di vedere la modellizzazione* dei tassi d'interesse: ad esempio tutti i modelli basati sui tassi a breve che consentono l'*inversione della curva dei rendimenti* possono essere visti come modelli tipo H.J.M. La differenza è che anziché partire dall'equazione di  $r(t)$  si parte dall'equazione di  $f(t, T)$ .

Ad esempio per un modello dotato di A.T.S. e quindi della forma  $B(t, T) = \exp(a(t, T) - b(t, T)r(t))$ , si ha  $f(t, T) = -a_T(t, T) + b_T(t, T)r(t)$  e di conseguenza l'equazione soddisfatta da  $f(t, T)$  diventa

$$df(t, T) = (\dots) dt + b_T(t, T) \sigma(t, r(t)) dW_t$$

Non è stato fatto il calcolo del termine  $\alpha(t, T)$  perché (sotto la probabilità martingala) segue dal teorema 4.6.1, mentre (con le notazioni di questo paragrafo) si ha  $\sigma(t, T) = b_T(t, T) \sigma(t, r(t))$ .

I modelli basati sul tasso forward sono genuinamente  $d$ -dimensionali ed in alcune estensioni addirittura infinito-dimensionali: questa caratteristica infinito-dimensionale è stata ulteriormente messa in evidenza dalla **parametrizzazione di Musiela**.

Musiela ha chiamato  $D(t, x) = B(t, t+x)$  e  $r(t, x) = f(t, t+x)$  dove  $x > 0$ : per usare le sue parole ha sostituito il *time of maturity* con il *time to maturity*. Guardiamo l'evoluzione di  $r(\cdot, \cdot)$ :

$$\begin{aligned} r(t+\Delta t, x) - r(t, x) &= f(t+\Delta t, t+\Delta t+x) - f(t+\Delta t, t+x) + f(t+\Delta t, t+x) - f(t, t+x) \approx \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial T}(t+\Delta t, t+x)\Delta t + \alpha(t+\Delta t, t+x)\Delta t + \sigma(t+\Delta t, t+x)(W_{t+\Delta t} - W_t) \end{aligned}$$

e si arriva pertanto all'equazione

$$dr(t, \cdot) = (\alpha(t, \cdot) + Dr(t, \cdot)) dt + \sigma(t, \cdot) dW_t$$

dove  $r(t, \cdot)$  è a valori in un opportuno spazio di funzioni e  $D$  è l'operatore di derivazione. Si tratta quindi di una *equazione differenziale stocastica infinito-dimensionale*.

Questo ha portato a sviluppi matematici interessanti che però non hanno trovato un efficiente riscontro nelle applicazioni.

## 4.7 Uso del cambio di numerario nei tassi d'interesse

Consideriamo assegnato un modello per i tassi d'interesse e supponiamo di essere già sotto la *probabilità martingala*, immaginiamo cioè che sotto  $\mathbf{P}$  ogni  $\tilde{B}(t, T)_{0 \leq t \leq T}$  sia una martingala.

Fissato un tempo  $T$ , possiamo prendere come *numerario*  $B(t, T)$  e chiamiamo  $\mathbf{P}^T$  la probabilità corrispondente (è chiamata *T-forward measure*) la cui densità rispetto a  $\mathbf{P}$  è  $\frac{B(T, T)}{B_T \cdot B(0, T)}$  e più in generale

$$\frac{d\mathbf{P}^T}{d\mathbf{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t, T)}{B_t \cdot B(0, T)}$$

Bisogna fare attenzione a un particolare: il processo  $B(t, T)$  è definito fino al tempo  $T$  e quindi la densità sopra scritta è  $\mathcal{F}_T$  misurabile e la formula per  $\frac{d\mathbf{P}^T}{d\mathbf{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t}$  (come è scritta sopra) è vera per  $t \leq T$ . Indichiamo inoltre con  $\mathbf{E}^T$  la speranza fatta rispetto alla probabilità  $\mathbf{P}^T$ .

Più in generale, scelti due tempi  $T_1$  e  $T_2$ , si ha

$$\frac{d\mathbf{P}^{T_2}}{d\mathbf{P}^{T_1}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t, T_2)}{B(t, T_1)} \cdot \frac{B(0, T_1)}{B(0, T_2)} \quad \text{se } t \leq T_1 \wedge T_2$$

Sotto la probabilità  $\mathbf{P}$ ,  $B(t, T)$  soddisfa una equazione della forma  $dB(t, T) = B(t, T) [r(t) dt + S(t, T) dW_t]$ , e con facili calcoli si trova che

$$d\left(\frac{B(t, T_2)}{B(t, T_1)}\right) = \left(\frac{B(t, T_2)}{B(t, T_1)}\right) \left[ (\dots) dt + (S(t, T_2) - S(t, T_1)) \cdot dW_t \right]$$

Non è calcolato il termine davanti a  $dt$  perché cambia al variare della probabilità equivalente, e ad esempio è eguale a 0 con la probabilità  $\mathbf{P}^{T_1}$ ; indichiamo  $\sigma(t, T_1, T_2) = (S(t, T_2) - S(t, T_1))$  e osserviamo che, se  $W_t$  è  $d$ -dimensionale, si ha

$$\sigma(t, T_1, T_2) \cdot dW_t = \|\sigma(t, T_1, T_2)\| \cdot dW_t^*$$

dove  $W_t^*$  è un processo di Wiener a una dimensione. Notiamo anche che, se  $\|\sigma(t, T_1, T_2)\|$  è deterministico, ci troviamo di fronte a un *modello log-normale*.

**Esempio 4.7.1.** Riprendiamo l'esempio di una **opzione "call"** al tempo  $S$  su un **bond** di scadenza successiva  $T$ , con prezzo strike  $K$ .

Il prezzo di non arbitraggio al tempo  $t$  è dato da

$$C_t = B_t \cdot \mathbf{E} \left[ \frac{(B(S, T) - K)^+}{B_S} \Big| \mathcal{F}_t \right] = B(t, S) \cdot \mathbf{E}^S [ (B(S, T) - K)^+ | \mathcal{F}_t ]$$

Sia  $A = \{B(S, T) > K\} = \left\{ \frac{B(S, T)}{B(S, S)} > K \right\}$ ; ripetendo sostanzialmente i passaggi già fatti nella sezione 3.7 si trova

$$C_t = B(t, S) \mathbf{E}^S [ B(S, T) I_A | \mathcal{F}_t ] - K B(t, S) \mathbf{E}^S [ I_A | \mathcal{F}_t ] =$$

$$= B(t, T) \mathbf{E}^T [I_A | \mathcal{F}_t] - K B(t, S) \mathbf{E}^S [I_A | \mathcal{F}_t]$$

Nel fare i conti interessa solo la dinamica di  $\left(\frac{B(t, T)}{B(t, S)}\right)_{0 \leq t \leq S}$ , che abbiamo visto essere

$$d\left(\frac{B(t, T)}{B(t, S)}\right) = \left(\frac{B(t, T)}{B(t, S)}\right) \left[ (\dots) dt + \sigma(t, S, T) dW_t \right]$$

Se  $\|\sigma(t, S, T)\|$  è deterministica, ci troviamo di fronte un modello *lognormale* e si arriva a formule tipo Black-Scholes, più precisamente

$$C_t = B(t, T) \Phi(d_1) - K B(t, S) \Phi(d_2) \quad d_{1,2} = \frac{\log\left(\frac{B(t, T)}{B(t, S)K}\right) \pm \frac{1}{2}\Sigma_{S, T}^2(t)}{\sqrt{\Sigma_{S, T}^2(t)}}$$

dove  $\Sigma_{S, T}^2(t) = \int_t^S \|\sigma(s, S, T)\|^2 ds$ . Ma soprattutto (sempre se  $\|\sigma(t, S, T)\|$  è deterministica) si ottiene *un portafoglio di copertura basato sui due attivi*  $B(t, S)$  e  $B(t, T)$  (e questo è finanziariamente significativo).

#### Esempio 4.7.2. Modelli basati sul tasso a breve dotati di A.T.S.

Partiamo da una equazione della forma

$$dr(t) = (\alpha(t)r(t) + \beta(t)) dt + \sqrt{\gamma(t)r(t) + \delta(t)} dW_t$$

e sappiamo che si ha  $B(t, T) = \exp(a(t, T) - b(t, T)r(t))$ .

$$d\left(\frac{B(t, T)}{B(t, S)}\right) = \left(\frac{B(t, T)}{B(t, S)}\right) \left[ (\dots) dt + (b(t, T) - b(t, S)) \sqrt{\gamma(t)r(t) + \delta(t)} dW_t \right]$$

Pertanto  $\sigma(t, S, T) = (b(t, T) - b(t, S)) \sqrt{\gamma(t)r(t) + \delta(t)}$ ; notiamo che nei modelli di Vasicek e di Ho-Lee arriviamo ad un modello log-normale, mentre questo non è vero con il modello C.I.R. Tuttavia non è difficile verificare che nel modello C.I.R. arriviamo comunque a un modello completo.

#### Esempio 4.7.3. Modelli tipo H.J.M.

Abbiamo visto che, se  $df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t$ , si ha  $S(t, T) = -\int_t^T \sigma(t, s) ds$  e quindi  $\sigma(t, S, T) = -\int_S^T \sigma(t, s) ds$ .

In questo caso pertanto

$$\Sigma_{S, T}^2(t) = \int_t^S \left\| \int_S^T \sigma(s, u) du \right\|^2 ds$$

## 4.8 Modelli basati sul tasso LIBOR

Prima di introdurre i modelli basati sul tasso LIBOR, introduciamo la famosa **formula Black-76**.

Cominciamo con alcune notazioni, che saranno mantenute per tutto questo paragrafo: fissiamo dei tempi  $0 \leq T_0 < T_1 < \dots < T_N$ , chiamiamo  $B_i(t) = B(t, T_i)$ ,  $L_i(t) = L(t, T_{i-1}, T_i)$  e sia infine  $\alpha_i = T_i - T_{i-1}$ .

Sappiamo che  $\alpha_i L_i(t) = \frac{B_{i-1}(t)}{B_i(t)} - 1$ . Il “*caplet*” sull’intervallo  $]T_{i-1}, T_i]$  vale  $\alpha_i \cdot (L(T_{i-1}, T_i) - R)^+$  (alla data  $T_i$ ): la *formula Black-76* per la valutazione al tempo  $t < T_{i-1}$  del caplet  $i$ -mo è la seguente

$$\text{Capl}_i^B(t) = \alpha_i B_i(t) [L_i(t)\Phi(d_1) - R\Phi(d_2)]$$

dove  $d_{1,2} = \frac{\log\left(\frac{L_i(t)}{R}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma_i^2(T_i - t)}{\sigma_i\sqrt{T_i - t}}$ . I numeri  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  sono chiamati le *volatilità implicite di Black* e possono essere di due tipi:

- **Volatilità spot:** sono scelti in modo tale che  $\text{Capl}_i^m(0) = \text{Capl}_i^B(0, \bar{\sigma}_i)$
- **Volatilità flat:** sono scelti in modo tale che  $\text{Cap}_k^m(0) = \sum_{i=1}^k \text{Capl}_i^B(0, \sigma_k^*)$

Spieghiamo meglio quanto scritto: i termini  $\text{Capl}_i^m(0)$  e  $\text{Cap}_k^m(0)$  sono rispettivamente i prezzi dei *caplet* e dei *cap* osservati sul mercato. Nel primo caso si valuta separatamente ogni  $\bar{\sigma}_i$ , nel secondo si ha  $\sigma_1^* = \dots = \sigma_k^*$  e si fa in modo che coincidano le formule per il *cap* al tempo  $T_k$ .

La dimostrazione che Black ha dato di questa formula non era molto rigorosa, e ad essere precisi la formula non è esatta, almeno negli esempi più significativi del paragrafo precedente. Infatti questa formula fa pensare che  $L_i(t)$  sia log-normale ma negli esempi precedenti  $\frac{B_{i-1}(t)}{B_i(t)}$  era lognormale e quindi non lo può essere  $L_i(t)$ .

Nonostante questo la formula è stata ampiamente usata dai “*practitioners*” rivelandosi efficace; solo vent’anni più tardi Brace, Gatarek e Musiela hanno costruito un modello che la rende valida, però con una modifica (piccola dal punto di vista pratico ma importante dal punto di vista teorico). Il principio del loro articolo è costruire una modellizzazione partendo proprio dai tassi LIBOR, cioè da entità direttamente osservabili sul mercato; l’articolo è molto tecnico e qui ci limitiamo a esporne una versione semplificata a tempi discreti.

Partiamo da uno spazio di probabilità sul quale è costruita una filtrazione  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T_N}$  generata da un processo di Wiener  $d$ -dimensionale (i tempi  $0 \leq T_0 < \dots < T_N$  sono come sopra).

**Definizione 4.8.1 (Modello di mercato LIBOR (a tempi discreti)).** Si chiama modello di mercato LIBOR una famiglia di  $N$  processi adattati  $L_i(t)_{0 \leq t \leq T_i}$  con queste proprietà:

- esiste una probabilità  $\mathbf{P}^N$  ed un processo di Wiener  $W_t^N$  tale che

$$dL_N(t) = L_N(t) \sigma_N(t) dW_t^N$$

e inoltre, per ogni  $i < N$ ,  $\frac{B_i(t)}{B_N(t)}$  è una  $\mathbf{P}^N$ -martingala

- presa la probabilità  $\mathbf{P}^i$  definita dalla formula

$$\frac{d\mathbf{P}^i}{d\mathbf{P}^N} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B_i(t)}{B_N(t)} \frac{B_N(0)}{B_i(0)}$$

e detto  $W_t^i$  il processo di Wiener corrispondente, il processo  $L_i(t)$  soddisfa l'equazione

$$dL_i(t) = L_i(t) \sigma_i(t) dW_t^i$$

Diamo una **dimostrazione dell'esistenza**: quando i tempi  $T_0, \dots, T_N$  sono finiti, la costruzione è abbastanza semplice e si fa per induzione all'indietro. Più precisamente, costruiamo  $L_N(t), L_{N-1}(t), \dots, L_1(t)$  sotto la probabilità  $\mathbf{P}^N$  ponendo:

$$dL_N(t) = L_N(t) \sigma_N(t) dW_t^N$$

$$dL_i(t) = L_i(t) \left[ \mu_i(t, L_{i+1}(t), \dots, L_N(t)) dt + \sigma_i(t) dW_t^N \right]$$

dove le funzioni  $\mu_{N-1}(\cdot), \mu_{N-2}(\cdot), \dots$  sono da determinare.

Definiamo ricorsivamente (dopo aver posto  $a_i = \frac{B_i(0)}{B_{i-1}(0)}$ )

$$\frac{d\mathbf{P}^i}{d\mathbf{P}^{i+1}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B_i(t)}{B_{i+1}(t)} \cdot \frac{B_{i+1}(0)}{B_i(0)} = a_{i+1} (1 + \alpha_{i+1} L_{i+1}(t)) = \Gamma_t^i$$

Controlliamo l'equazione soddisfatta da  $\Gamma_t^i$ :

$$\begin{aligned} d\Gamma_t^i &= a_{i+1} \alpha_{i+1} L_{i+1}(t) \sigma_{i+1}(t) dW_t^{i+1} = \\ &= a_{i+1} \left( \frac{B_i(t)}{B_{i+1}(t)} - 1 \right) \sigma_{i+1}(t) dW_t^{i+1} = \\ &= \Gamma_t^i \frac{a_{i+1}}{\Gamma_t^i} \left( \frac{B_i(t)}{B_{i+1}(t)} - 1 \right) \sigma_{i+1}(t) dW_t^{i+1} = \\ &= \Gamma_t^i \frac{\alpha_{i+1} L_{i+1}(t)}{1 + \alpha_{i+1} L_{i+1}(t)} \sigma_{i+1}(t) dW_t^{i+1} \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} dW_t^i &= dW_t^{i+1} - \frac{\alpha_{i+1} L_{i+1}(t)}{1 + \alpha_{i+1} L_{i+1}(t)} \sigma_{i+1}(t) dt = \\ &= dW_t^N - \sum_{k=i+1}^N \frac{\alpha_k L_k(t)}{1 + \alpha_k L_k(t)} \sigma_k(t) dt \end{aligned}$$

Si pone allora

$$dL_t^i = L_t^i \sigma_i(t) dW_t^i = L_t^i \left( - \sum_{k=i+1}^N \frac{\alpha_k L_k(t)}{1 + \alpha_k L_k(t)} \sigma_k(t) \sigma_i(t) dt + \sigma_i(t) dW_t^N \right)$$

e in questo modo è determinato  $\mu_i(t, L_{i+1}(t), \dots, L_N(t))$ .

Guardiamo separatamente ogni  $L_i(t)$  prendendo come numerario  $B_i(t)$ :  $\text{Capl}_i(t) = \alpha_i B_i(t) \mathbf{E}^{T_i} [(L_i(T_{i-1})) - R]^+ | \mathcal{F}_t$ , e si ottiene pertanto la formula

$$\boxed{\text{Capl}_i(t) = \alpha_i B_i(t) [L_i(t) \Phi(d_1) - R \Phi(d_2)]}$$

con  $d_{1,2} = \frac{\log\left(\frac{L_i(t)}{R}\right) \pm \frac{1}{2} \Sigma_i^2(t, T_{i-1})}{\sqrt{\Sigma_i^2(t, T_{i-1})}}$ , dove  $\Sigma_i^2(t, T_{i-1}) = \int_t^{T_{i-1}} \|\sigma_i(s)\|^2 ds$ .

È evidente la somiglianza con la formula Black-76, ma è importante (almeno dal punto di vista teorico) la differenza: in questa nuova formula appare chiaro che, anche se la liquidazione avviene al tempo  $T_i$ , il modello (cioè l'incertezza) termina al tempo  $T_{i-1}$ : è infatti in quel momento che viene determinato il tasso d'interesse.

Nella applicazione pratica di queste formule si procede in questo modo:

- si parte dalle volatilità implicite di Black (prendiamo ad esempio le *volatilità spot*)
- si scelgono le funzioni  $\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots$  in modo che valga l'eguaglianza  $\bar{\sigma}_i^2 \cdot T_i = \int_0^{T_{i-1}} \|\sigma_i(s)\|^2 ds$ .

Una costruzione simile può essere fatta per modelli *basati sui tassi Swap*, si trova però che i due modelli sono incompatibili: più precisamente se i tassi LIBOR sono log-normali non possono esserlo i tassi Swap e viceversa. Questa è una ulteriore dimostrazione del fatto che i modelli finanziari non sono mai *universali*: sono sempre modelli *ridotti*, cioè limitati ad un particolare problema.

**Esempio 4.8.2 (Il mercato dei mutui immobiliari).**

Questo enorme mercato (la cui crisi è stata la miccia che ha fatto esplodere la crisi globale iniziata nel 2008) è legato ai tassi LIBOR su ogni mese: se si vuole pertanto modellizzare la situazione nei prossimi 10 anni si devono considerare 120 processi  $L_i(t)$  (i tassi LIBOR sui successivi 120 mesi) e non un *continuo di attivi* come avviene ad esempio con la modellizzazione H.J.M.

Quando si chiede un mutuo, poniamo decennale, su un immobile, solitamente la Banca offre la scelta tra un tasso fisso ed uno variabile (tipicamente il tasso Euribor più una differenza chiamata *spread*): offre in sostanza uno *Swap*. Il tasso d'interesse è noto ad inizio mese (il tasso Euribor sul mese successivo) ma il pagamento avviene a fine mese.

Vediamo come si calcola la rata di un mutuo: supponiamo di dover rimborsare un capitale  $C$  in  $n$  rate di importo eguale  $D$ , e sia  $r$  il tasso d'interesse sul periodo. Attualizzando tutti i pagamenti all'istante iniziale si ottiene

$$C = \sum_{k=1}^n \frac{D}{(1+r)^k}$$

(lasciamo completare i facili conti). Se il tasso d'interesse è variabile mese per mese (come con i mutui a tasso indicizzato), se mancano  $m$  rate ed il capitale ancora da rimborsare è  $\tilde{C}$ , la rata successiva si calcola come se dovessero essere tutte eguali fino all'estinzione.

**4.9 Conclusioni e estensioni**

I modelli basati sul tasso a breve sono stati i primi ad essere utilizzati, e continuano ad essere i più usati dai *practitioners*, soprattutto per la loro semplicità di calcolo. Sono però dei modelli piuttosto limitati e il fatto che si possa scrivere  $B(t, T) = F^T(t, r(t))$  indica che l'unica variabile significativa è il tasso a breve e questo è fortemente limitante (e chiaramente non realistico in un momento nel quale ci sia un disallineamento tra i tassi a breve e quelli a lungo termine).

Alcune proprietà dei modelli che qualche anno fa sembravano importanti si sono rivelate non più realistiche con la mutata situazione economica: tale è ad esempio la proprietà di *mean reversion*. In termini intuitivi questa indica una forma di convergenza asintotica dei tassi pur con ampie oscillazioni casuali: questo è sembrato realistico ad esempio quando è stato adottato l'Euro. In una situazione di libero scambio all'interno dell'Europa è sembrato ragionevole immaginare che i tassi tra diversi paesi tendessero ad uniformarsi

... le vicende del divario (*spread*) tra i Bond tedeschi ed i Bond di paesi in difficoltà economica mostra quanto questa ipotesi fosse poco realistica.

Inoltre sempre più appare non significativo andare alla ricerca di risultati asintotici: non è prevedibile quale sarà la situazione politica in Europa tra due-tre anni e quali scossoni ci potranno essere nei mercati finanziari. I modelli finanziari sono significativi solo con un orizzonte temporale limitato.

Un'altra proprietà generale che sembrava fondamentale nella modellizzazione era garantire che gli interessi siano sempre positivi (anche per questo motivo il modello C.I.R. è stato per tanti anni il più usato); ma da un paio d'anni, con una situazione economica di stagnazione, è comparso l'imprevisto fenomeno degli *interessi negativi* sui titoli di breve durata. Il modello C.I.R. non è adeguato a contemplare questo fenomeno.

Il modelli basati sul tasso forward sono chiaramente molto più elastici e significativi dal punto di vista matematico, e la parametrizzazione di Musiela ha messo maggiormente in risalto il carattere infinito-dimensionale dei modelli per i tassi; di fronte però a situazioni di calcolo concrete questa ricca modellizzazione non sempre si è dimostrata efficiente.

Probabilmente sono più adatti i *modelli di mercato*, cioè modelli basati su attivi direttamente osservabili come i tassi LIBOR o i tassi Swap. Il loro uso non è ancora ben consolidato, inoltre la costruzione di questi modelli non per un numero finito di scadenze (come abbiamo visto in questo capitolo) ma per un *continuo* di scadenze è matematicamente decisamente complessa.

Ma ci sono altre estensioni, per ora ancora *in costruzione*, ma di grande importanza.

Una prima estensione riguarda i modelli per i tassi emessi da enti *che possono fallire* (*defaultable Bonds*): quando la società che li emette è fragile finanziariamente deve dare un interesse maggiore per compensare il rischio di mancato pagamento alla fine. Ad esempio la Parmalat, nei primi anni del 2000, emetteva Bond che fruttavano un interesse del 6% quando a livello internazionale i Bond *sicuri* mai superavano il 2%: sembrava un ottimo affare, ma poi nel 2003 da un giorno all'altro questi Bond sono diventati carta straccia. Qualcosa di simile è accaduto nel 2001 con i titoli di stato argentini (i cosiddetti "*tango bonds*").

I modelli per i "*defaultable bonds*" cercano di misurare quanto dovrebbe essere più alto l'interesse rilasciato da titoli rischiosi per compensare questo rischio.

Un'altra estensione (anche questa in fase di rodaggio, ma di sicuro interesse) riguarda i cosiddetti *modelli multicurve*: si ritiene cioè non realistico modellizzare una sola curva dei tassi, ma opportuno dare modellizzazioni separate per attivi finanziari di carattere diverso.

Spieghiamoci con un esempio: i tassi Euribor, come dicevo, sono pubblicati giorno per giorno (risultato dei dati di alcune Banche ritenute significative) e riguardano il periodo da una settimana ad un anno. Ma tra Banche e società finanziarie è usuale scambiarsi denaro per tempi brevissimi, addirittura una notte (*"tassi overnight"*), ad esempio per chiudere i conti alla fine della giornata.

A questo proposito ha acquistato sempre più peso il tasso EONIA (Euro Over Night Interest Average), una media ponderata dei tassi sui prestiti *overnight*. Fino a poco fa i tassi EONIA erano assimilati ai tassi Euribor a una settimana, ma adesso si è presentata una diminuzione abbastanza significativa: la spiegazione economica probabilmente risiede nel fatto che *anche le grosse Banche falliscono*, come si è visto e come sembrava impossibile fino alla crisi del 2008 (esplosa proprio con il fallimento di Lehman Brothers; in realtà non è stato il fallimento di L.B. che ha provocato la crisi, ma quando L.B. è fallita è risultata evidente la serietà della crisi).

Quindi anche negli scambi di denaro tra Banche c'è un rischio, rischio che sembra molto inferiore *"overnight"*: questo spiega perché il tasso EONIA si è disallineato rispetto al tasso Euribor più breve e ne indica l'opportunità di una modellizzazione separata.

## 4.10 Appendice

### 4.10.1 Sul modello C.I.R.

Come si era detto, il modello C.I.R. è basato sullo studio approfondito di alcuni processi di diffusione effettuato da Feller; noi ci limitiamo al minimo di conti indispensabili per giustificare la regola  $ab \geq \frac{\sigma^2}{2}$ .

Sia  $\mu(t, x)$  continua e uniformemente lipschitziana rispetto ad  $x$ , e consideriamo l'equazione

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t \\ X_0 = x_0 > 0 \quad X(\omega, t) > 0 \end{cases}$$

Fissiamo  $0 < \varepsilon < x_0$  e consideriamo una funzione  $g_\varepsilon(x)$  che sia eguale a  $\sigma \sqrt{x}$  per  $x \geq \varepsilon$ , sia eguale a 0 per  $x \leq 0$  e sia globalmente di classe  $C^1$ . L'equazione

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = \mu(t, X_t^\varepsilon) dt + g_\varepsilon(X_t^\varepsilon) dW_t \\ X_0^\varepsilon = x_0 \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione su tutto  $\mathbb{R}^+$ .

Prendiamo allora una successione  $x_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \dots$  con  $\varepsilon_n \downarrow 0$  e sia  $X_t^n = X_t^{\varepsilon_n}$ .

Definiamo poi i tempi d'arresto  $\tau_n(\omega) = \inf \{s \geq 0 \mid X^{n+1}(\omega, s) \leq \varepsilon_n\}$ . Un fatto fondamentale (che si verifica facilmente) è l'eguaglianza dei processi arrestati  $X_{t \wedge \tau_n}^{n+1} = X_{t \wedge \tau_n}^n$ , e posto  $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$ , questo permette di costruire la soluzione  $X_t$  però su  $[0, \tau[ = \{(\omega, s) \mid s < \tau(\omega)\}$ .

$$\text{Arriviamo adesso al modello C.I.R. } \begin{cases} dX_t = a(b - X_t) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t \\ X_0 = x_0 > 0 \end{cases}$$

Consideriamo la funzione  $f(x) = \int_1^x e^{\frac{2by}{\sigma^2}} y^{-\frac{2ab}{\sigma^2}} dy$  e notiamo che  $f$  è soluzione dell'equazione  $\frac{\sigma^2}{2} x f''(x) + a(b - x) f'(x) = 0$ ; inoltre si ha

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \begin{cases} \text{reale} & ab < \frac{\sigma^2}{2} \\ -\infty & ab \geq \frac{\sigma^2}{2} \end{cases}$$

Consideriamo i tempi d'arresto  $\tau_\varepsilon(\omega) = \inf \{s \geq 0 \mid X(\omega, s) \leq \varepsilon\}$  e  $\tau_M(\omega) = \inf \{s \geq 0 \mid X(\omega, s) \geq M\}$ , e sia  $\tau_{\varepsilon, M} = \tau_\varepsilon \wedge \tau_M$ .

Applicando la formula di Ito si trova

$$f(X_{t \wedge \tau_{\varepsilon, M}}) = f(x) + \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, M}} f'(X_s) \sigma \sqrt{X_s} dW_s$$

Poiché  $f(\cdot)$  è limitata tra  $\varepsilon$  e  $M$  e  $\sqrt{X_s}$  è inferiormente limitata, se ne deduce  $\mathbf{E}[t \wedge \tau_{\varepsilon, M}] \leq C$  (la costante  $C$  indipendente da  $t$ ), e quindi al limite  $\mathbf{E}[\tau_{\varepsilon, M}] \leq C$  cioè  $\tau_{\varepsilon, M} < +\infty$  q.c.

Prendendo la speranza, si ottiene

$$f(x) = f(\varepsilon) \mathbf{P}\{\tau_\varepsilon < \tau_M\} + f(M) \mathbf{P}\{\tau_\varepsilon > \tau_M\}$$

Notiamo inoltre che, se  $\tau(\omega) = +\infty$ , si ha  $\lim_{M \rightarrow \infty} \tau_M(\omega) = +\infty$ .

Supponiamo  $ab \geq \frac{\sigma^2}{2}$ : poiché  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\varepsilon) = -\infty$  ne segue l'eguaglianza  $\mathbf{P}\{\tau_\varepsilon < \tau_M\} = 0$  e al limite  $\mathbf{P}\{\tau < \tau_M\} = 0$  e di conseguenza  $\tau = +\infty$  q.c.

Supponiamo viceversa  $ab < \frac{\sigma^2}{2}$ : questa volta si sfrutta  $\lim_{M \rightarrow \infty} f(M) = +\infty$  e da qui segue  $\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\tau > \tau_M\} = 0$  ossia  $\tau < +\infty$  q.c.

## 4.10.2 Sul teorema di Fubini stocastico

Il teorema tipo Fubini stocastico, cioè la possibilità di scambiare l'ordine di integrazione tra integrale stocastico e integrale ordinario, in tutta generalità

è un risultato delicato, ma per lo scopo di questo corso è sufficiente una versione ridotta della quale tratteggiamo le linee della dimostrazione (lasciando i dettagli per esercizio).

Sul processo  $H$  facciamo queste *ipotesi semplificatrici*, sufficienti però a coprire la dimostrazione del teorema 4.6.1:  $H$  è definito su  $\Omega \times [0, T] \times [0, T]$  ed è tale che, fissati  $(t, s)$ ,  $\omega \rightarrow H(\omega, t, s)$  è  $\mathcal{F}_t$  misurabile e, fissato  $\omega$ ,  $(t, s) \rightarrow H(\omega, t, s)$  è continuo.

Supponiamo inoltre che si abbia  $\mathbf{E}[\int_0^T \int_0^T H^2(t, s) dt ds] < +\infty$ .

Il primo passo è provare le diseguaglianze

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbf{E}[|\int_0^T H(t, s) dW_t|] ds &\leq \int_0^T \left(\mathbf{E}[\int_0^T H^2(t, s) ds]\right)^{1/2} ds \leq \\ &\leq \sqrt{\mathbf{E}[\int_0^T \int_0^T H^2(t, s) dt ds]} \end{aligned}$$

e questo prova che ha senso l'integrale  $\int_0^T \left(\int_0^T H(t, s) dW_t\right) ds$ .

Come secondo passo, prendendo una suddivisione  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  è evidente l'eguaglianza

$$\int_0^T \left(\sum_{i=0}^{N-1} H(t_i, s) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right) ds = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_0^T H(t_i, s) ds\right) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

e a questo punto è facile andare al limite ed ottenere l'eguaglianza

$$\int_0^T \left(\int_0^T H(t, s) dW_t\right) ds = \int_0^T \left(\int_0^T H(t, s) ds\right) dW_t$$

Senza particolari difficoltà si estende questo risultato al caso in cui si abbia  $\int_0^T \int_0^T H^2(t, s) dt ds < +\infty$  q.c.

# Capitolo 5

## Teoria delle misure di rischio.

### 5.1 Introduzione alle misure di rischio: il VaR

Partiamo da uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , chiamato *scenario*, che rappresenta la situazione economica in una data futura; le variabili aleatorie  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sono chiamate *posizioni*. Lo scopo delle misure di rischio è valutare il rischio di una posizione (nella pratica, di un portafoglio di investimento).

Ricordiamo la definizione di *quantile* di una v.a. : preso  $0 < p < 1$ , si chiama  $p$ -quantile della v.a.r.  $X$  il numero  $q_p(X) = \inf \{t : \mathbf{P}\{X \leq t\} \geq p\}$ .

**Definizione 5.1.1 (Value at Risk).** Preso  $0 < \alpha < 1$  si definisce

$$VaR_\alpha(X) = -q_\alpha(X)$$

Solitamente si prende  $\alpha = 0,01$ : dicendo  $VaR_{0,01} = 1.000.000$  si intende che è stato stimato, con metodi statistici, che con probabilità 0,01 la eventuale perdita supera 1.000.000 €, e quindi con un capitale ulteriore di 1.000.000 € si può essere al sicuro (al 99% di probabilità). Una posizione  $X$  è detta *accettabile* se  $VaR(X) \leq 0$ , e poiché  $VaR(X + \beta) = VaR(X) - \beta$ , si ottiene l'eguaglianza

$$VaR_\alpha(X) = \inf \{ \beta \in \mathbb{R} \mid (X + \beta) \text{ è accettabile} \}$$

Tale *inf* in realtà è un minimo. Vediamo quali sono le proprietà del VaR:

- 1)  $X \geq 0 \Rightarrow VaR_\alpha(X) \leq 0$
- 2) se  $\lambda > 0$ ,  $VaR(\lambda X) = \lambda VaR(X)$
- 3)  $VaR(X + k) = VaR(X) - k$

Inoltre il VaR ha il grande pregio di essere definito per tutte le variabili aleatorie. Ha però un **grave difetto**: non è *subadditivo* e quindi non spinge alla *diversificazione*, mentre è ben noto che la diversificazione degli investimenti è una fonte di diminuzione del rischio.

Prendiamo l'esempio di una banca che ha fornito un prestito di 100.000 € a un cliente che ha probabilità 0,8 % di fallire: se  $X$  rappresenta la posizione di questa banca, il suo  $VaR_{0,01}$  è 0. Consideriamo invece un'altra banca che ha fornito due prestiti da 50.000 € a due clienti che hanno ciascuno probabilità 0,8 % di fallire indipendentemente uno dall'altro: questa seconda posizione è evidentemente meno rischiosa ma il suo VaR è di 50.000 €.

Questa osservazione ha spinto a introdurre una teoria delle *misure coerenti di rischio* definite su un opportuno spazio di variabili aleatorie: siccome è necessario lavorare con diverse probabilità (equivalenti o almeno assolutamente continue rispetto alla probabilità di riferimento  $\mathbf{P}$ ), occorrono spazi di variabili aleatorie che non cambino passando ad una probabilità equivalente.

Questi sono essenzialmente due:  $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  e  $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  (quest'ultimo è lo spazio delle classi di equivalenza di tutte le v.a. munito della convergenza in probabilità). Vedremo che considerare l'intero spazio  $L^0$  pone grosse difficoltà.

## 5.2 Teoria assiomatica delle misure di rischio

Supponiamo assegnato lo scenario  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  e indichiamo  $\mathcal{Q} = \{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}\}$ : notiamo che  $\mathcal{Q}$  si può identificare con  $\{g \in L_+^1 \mid \int g d\mathbf{P} = 1\}$ , dove con  $L_+^1$  si intendono le funzioni di  $L^1$  a valori positivi. Bisogna inoltre supporre per ipotesi che lo spazio  $L^1$  sia separabile (questo è verificato se la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  è numerabilmente generata e quindi praticamente in tutti gli esempi noti).

**Definizione 5.2.1 (Misura coerente di rischio).** Si chiama misura coerente di rischio una funzione  $\rho: L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  con le seguenti proprietà:

- 1)  $X \geq 0 \Rightarrow \rho(X) \leq 0$
- 2)  $\rho(X + k) = \rho(X) - k$
- 3) se  $\lambda \geq 0$ ,  $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$
- 4)  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

Notiamo che le proprietà 3) e 4) implicano che la funzione  $\rho$  sia convessa, inoltre la proprietà 1) può essere sostituita dalle seguente:  
 $X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$ .

In seguito alla definizione precedente se ne è affiancata un'altra, che la generalizza:

**Definizione 5.2.2 (Misura convessa di rischio).** Si chiama misura convessa di rischio una funzione  $\rho^* : L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  con le seguenti proprietà:

- 1)  $X \geq Y \Rightarrow \rho^*(X) \leq \rho^*(Y)$
- 2)  $\rho^*(X + k) = \rho^*(X) - k$
- 3)  $\rho^*$  è convessa

Osserviamo che per le misure coerenti si ha sempre  $\rho(0) = 0$  mentre non è detto che valga  $\rho^*(0) = 0$ . Indichiamo inoltre con  $\mathcal{A}$  (rispettivamente  $\mathcal{A}^*$ ) l'insieme di *accettazione*, cioè l'insieme  $\{X \mid \rho(X) \leq 0\}$ : notiamo che si ha  $\rho(X) = \inf \{\beta \in \mathbb{R} \mid (X + \beta) \in \mathcal{A}\}$  (e analogha proprietà per  $\rho^*$ ).

Notiamo infine che  $\mathcal{A}^*$  è un sottinsieme *convesso* di  $L^\infty$ , mentre  $\mathcal{A}$  è un *cono convesso* di  $L^\infty$  contenente  $L_+^\infty$  (cono significa che se  $X \in \mathcal{A}$  e  $t$  è positivo, allora  $tX \in \mathcal{A}$ ).

**Proposizione 5.2.3 (Proprietà di Fatou).** Sono equivalenti le due proprietà seguenti:

- a)  $\|X_n\|_\infty \leq C, X_n \xrightarrow{q.c.} X \Rightarrow \rho^*(X) \leq \liminf_n \rho^*(X_n)$
- b)  $\|X_n\|_\infty \leq C, X_n \downarrow X \Rightarrow \rho^*(X_n) \uparrow \rho^*(X)$

Quando queste proprietà sono soddisfatte, si dice che  $\rho^*$  ha la proprietà di Fatou.

*Dimostrazione.* a)  $\Rightarrow$  b): poiché  $\rho^*(X_n)$  è crescente rispetto ad  $n$ ,  $\rho^*(X_n) \uparrow b \leq \rho^*(X)$ , ma poiché  $\rho^*(X) \leq \liminf_n \rho^*(X_n)$  si ha l'eguaglianza.

b)  $\Rightarrow$  a):  $X = \lim_n X_n = \limsup_n X_n = \inf_n (\sup_{k \geq n} X_k) = \inf_n Z_n$  (dove  $Z_n = \sup_{k \geq n} X_k$ ). Di conseguenza

$$\rho^*(X) = \sup_n \rho^*(Z_n) \leq \sup_n \inf_{k \geq n} \rho^*(X_k)$$

□

**Osservazione 5.2.4.** Se la misura di rischio è coerente, è più forte delle precedenti la proprietà seguente

- c)  $\|X_n\|_\infty \leq C, X_n \uparrow X \Rightarrow \rho(X_n) \downarrow \rho(X)$

*Dimostrazione.* Supponiamo  $X_n \downarrow X$  e scriviamo  $X = X_n + (X - X_n)$  e notiamo che per la c)  $\rho(X - X_n) \downarrow \rho(0) = 0$ .

Si ha  $\rho(X) \leq \rho(X - X_n) + \rho(X_n) \leq \sup_n \rho(X_n)$ , tuttavia si ha  $\rho(X) \geq \sup_n \rho(X_n)$  e quindi l'eguaglianza voluta. □

Prima di fornire la *caratterizzazione delle misure di rischio*, richiamiamo due risultati di analisi funzionale: il primo è riportato ad esempio nel libro di Brezis ("Functional analysis, Sobolev spaces ...") come teorema 3.33.

**Teorema 5.2.5 (Teorema di Krein-Smulian).** *Sia  $E$  uno spazio di Banach separabile, e  $C$  un sottinsieme convesso del duale  $E'$ :  $C$  è chiuso per la topologia  $\sigma(E', E)$  se e solo se, per ogni  $N > 0$ , indicando con  $B_N$  la palla di centro origine e raggio  $N$ ,  $C_N = C \cap B_N$  è chiuso (o equivalentemente è compatto) per la topologia  $\sigma(E', E)$ .*

Ricordiamo che, essendo  $E$  separabile, sulle parti limitate di  $E'$  la topologia  $\sigma(E', E)$  è *metrizzabile*. Il risultato che segue viceversa è molto meno noto ma renderà particolarmente breve la dimostrazione di un passaggio del successivo teorema; questo risultato è talvolta attribuito a Grothendieck e ne viene comunque riportata una dimostrazione in Appendice.

**Lemma 5.2.6.** *Sia  $C$  un sottinsieme convesso di  $L^\infty$ :  $C$  è chiuso per la topologia  $\sigma(L^\infty, L^1)$  se e solo se, per ogni  $N > 0$ ,  $C_N = C \cap B_N$  è chiuso per la convergenza in probabilità (o equivalentemente per la convergenza q.c.)*

**Teorema 5.2.7 (Caratterizzazione delle misure convesse di rischio).** *Sia  $\rho^*$  una misura convessa di rischio ed  $\mathcal{A}^*$  il relativo insieme di accettazione, sono equivalenti le seguenti proprietà:*

- 1)  $\rho^*$  ha la proprietà di Fatou
- 2)  $\mathcal{A}^*$  è chiuso per la topologia  $\sigma(L^\infty, L^1)$
- 3) esiste una funzione di penalizzazione  $\alpha : \mathcal{Q} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  con  $\inf_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} \alpha(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}$  tale che valga la rappresentazione

$$\rho^*(X) = \sup_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} (\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha(\mathbf{Q}))$$

- 4) nella rappresentazione precedente si può considerare

$$\alpha_{min}(\mathbf{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}^*} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X]$$

*Dimostrazione.* La strategia della dimostrazione consiste nel provare l'equivalenza tra 1) e 2) e poi 4)  $\Rightarrow$  3)  $\Rightarrow$  2)  $\Rightarrow$  4). Vediamo, cominciando dalle più facili, le successive implicazioni.

4)  $\Rightarrow$  3) è ovvia se si tiene conto del fatto che sicuramente esiste qualche costante accettabile e di conseguenza  $\alpha_{min}(\mathbf{Q}) \in ]-\infty, +\infty]$ .

3)  $\Rightarrow$  2) Per il teorema di Krein-Smulian ci si può limitare a considerare  $\mathcal{A}^* \cap B_N$ : sia dunque una successione  $(X_n)_{n \geq 1}$  di v.a. accettabili convergente ad  $X$  per la topologia  $\sigma(L^\infty, L^1)$ . Presa qualunque  $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$  si ha  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X_n] - \alpha(\mathbf{Q}) \leq 0$  e al limite  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha(\mathbf{Q}) \leq 0$  e quindi anche  $X$  è accettabile.

1)  $\Rightarrow$  2) è una conseguenza immediata del Lemma 5.2.6: infatti preso  $N > 0$ , come conseguenza della proprietà di Fatou,  $\mathcal{A}_N^* = \mathcal{A}^* \cap B_N$  è chiuso per la convergenza q.c.

2)  $\Rightarrow$  1) Proviamo che è soddisfatta la condizione b) della proposizione 5.2.3: se infatti non lo fosse, esisterebbe una successione  $(X_n)_{n \geq 1}$  con  $\|X_n\|_\infty \leq C$  e  $X_n \downarrow X$  però  $\lim_n \rho^*(X_n) < \rho^*(X)$ . Possiamo supporre (aggiungendo una costante) che si abbia  $\rho^*(X_n) \uparrow 0$ : ma allora le  $X_n$  sarebbero accettabili ed il limite non lo sarebbe, contraddicendo la chiusura di  $\mathcal{A}^*$ .

2)  $\Rightarrow$  4) Questa implicazione segue dal teorema di Hahn-Banach su  $L^\infty$  dotato della topologia  $\sigma(L^\infty, L^1)$ .

Definiamo  $\alpha_{min}(\mathbf{Q}) = \sup_{Y \in \mathcal{A}^*} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y]$ : poiché  $X + \rho^*(X)$  è accettabile, si ha  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X - \rho^*(X)] \leq \alpha_{min}(\mathbf{Q})$  e quindi  $\rho^*(X) \geq \sup_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} (\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_{min}(\mathbf{Q}))$ .

Per provare che la disuguaglianza sopra scritta è in realtà una eguaglianza, è sufficiente provare che, se  $m > \sup_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} (\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_{min}(\mathbf{Q}))$ , allora  $(X + m)$  è accettabile.

Supponiamo che non sia vero, e separiamo strettamente il convesso chiuso  $\mathcal{A}^*$  dal convesso compatto  $(X + m)$ : esiste cioè  $Z \in L^1$  tale che si abbia

$$\mathbf{E}[Z(X + m)] < \inf_{Y \in \mathcal{A}^*} \mathbf{E}[ZY]$$

Ne segue  $Z \geq 0$  q.c. (preso infatti  $A = \{Z < 0\}$ , la v.a.  $Y = k + \lambda I_A$  è accettabile per un certo  $k$  e per ogni  $\lambda > 0$  e se  $\mathbf{P}(A)$  fosse strettamente positiva l'inf a destra diventerebbe  $-\infty$ ); possiamo allora supporre  $\mathbf{E}[Z] = 1$  e considerare la probabilità  $\mathbf{Q}^Z = Z \cdot \mathbf{P}$ .

Notiamo che  $\inf_{Y \in \mathcal{A}^*} \mathbf{E}[ZY] = -\alpha_{min}(\mathbf{Q}^Z)$ , e di conseguenza si avrebbe  $m + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^Z}[X] < -\alpha_{min}(\mathbf{Q}^Z)$ , cioè  $m < (\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^Z}[-X] - \alpha_{min}(\mathbf{Q}^Z))$ , ma questo contraddice l'asserto  $m > \sup_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} (\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_{min}(\mathbf{Q}))$ .  $\square$

Come facile corollario del risultato precedente si ottiene la caratterizzazione delle misure coerenti di rischio.

**Teorema 5.2.8 (Caratterizzazione delle misure coerenti di rischio).**

*Sia  $\rho$  una misura coerente di rischio ed  $\mathcal{A}$  il relativo insieme di accettazione: sono equivalenti le seguenti proprietà*

- 1)  $\rho$  ha la proprietà di Fatou

2)  $\mathcal{A}$  è chiuso per la topologia  $\sigma(L^\infty, L^1)$

3) esiste un sottinsieme  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$  tale che valga la rappresentazione

$$\rho(X) = \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{P}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X]$$

*Dimostrazione.* Praticamente non c'è niente da dimostrare: basta osservare che, poiché  $\mathcal{A}$  è un cono,  $\alpha_{\min}(\mathbf{Q})$  può prendere solo i valori 0 oppure  $+\infty$  e quindi porre  $\mathcal{P} = \{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \mid \alpha_{\min}(\mathbf{Q}) = 0\}$   $\square$

Guardiamo meglio questa rappresentazione: prendiamo  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$  e consideriamo la misura di rischio  $\rho_{\mathcal{P}}(X) = \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{P}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X]$ .  $X$  è accettabile se, per ogni  $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ , si ha  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X] \geq 0$ .

Consideriamo due casi estremi: il primo è quello nel quale  $\mathcal{P}$  è una sola probabilità  $\mathbf{Q}$ . In tal caso  $X$  è accettabile se  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X] \geq 0$ : si tratta evidentemente di una misura di rischio troppo debole.

L'altro caso estremo è quello nel quale si considerano *tutte* le probabilità  $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ : in tal caso  $X$  è accettabile se si ha  $X(\omega) \geq 0$  q.c. e questa è evidentemente una misura di rischio troppo severa.

Vediamo ora quali sono le difficoltà che si incontrano se si vuole estendere la teoria delle misure di rischio allo spazio  $L^0$  (noi non affronteremo questa teoria più avanzata).

**Proposizione 5.2.9.** *Supponiamo che esista una misura coerente di rischio  $\rho : L^0 \rightarrow \mathbb{R}$ : allora esiste una applicazione lineare positiva  $G : L^0 \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Dimostrazione.*  $G$  positiva significa che, se  $X \geq 0$  q.c., allora  $G(X) \geq 0$ . Utilizziamo il teorema di Hahn-Banach nella versione analitica detta di Helly-Hahn-Banach (vedi Brezis teorema 1.1). Ecco l'enunciato di questo teorema: sia  $E$  uno spazio vettoriale e supponiamo che esista  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  con le proprietà  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  e  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$  se  $\lambda > 0$ ; supponiamo inoltre che esista una applicazione lineare  $g$  definita su un sottospazio  $V$  di  $E$  tale che  $g(x) \leq p(x)$  per ogni  $x \in V$ . Allora esiste un prolungamento lineare  $f$  di  $g$  definito su tutto  $E$  tale che  $f(x) \leq p(x) \forall x \in E$ .

Consideriamo allora su  $L^0$  la funzione  $p(X) = \rho(X)$ ,  $V$  è il sottospazio delle costanti (sappiamo che  $\rho(k) = -k$ ) e poniamo  $g(k) = -k$ . Sia poi  $f$  il prolungamento di  $g$  a tutto  $L^0$ : se  $X \geq 0$ ,  $\rho(X) \leq 0$  e quindi  $f(X) \leq 0$ . Per ottenere  $G$  positiva basta considerare  $G(X) = -f(X)$ .  $\square$

**Proposizione 5.2.10.** *Sia  $G : L^0 \rightarrow \mathbb{R}$  positiva: allora  $G$  è continua.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che esistano  $\varepsilon > 0$  e una successione  $(X_n)_{n \geq 1}$  convergente in probabilità a 0 tale che  $|G(X_n)| \geq \varepsilon$  per ogni  $n$ : possiamo supporre (cambiando eventualmente segno)  $G(X_n) \geq 0$  e possiamo anche supporre che  $X_n$  sia a valori positivi. Esiste una sottosuccessione  $n_k$  con  $\mathbf{P}\{X_{n_k} > 2^{-k}\} < 2^{-k}$  e quindi  $X = \sum_{k \geq 1} X_{n_k}$  è a valori finiti.

Tuttavia per ogni  $k$  si ha  $G(X) \geq G(X_{n_1} + \dots + X_{n_k}) \geq k\varepsilon$  e questo è impossibile.  $\square$

**Proposizione 5.2.11.** *Se lo spazio  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  è non-atomico, il duale di  $L^0$  è banale (cioè ridotto alla sola costante 0).*

*Dimostrazione.* Supponiamo che esista  $G : L^0 \rightarrow \mathbb{R}$  lineare continua non nulla: esiste  $A \in \mathcal{F}$  con  $G(I_A) \neq 0$  e possiamo supporre  $G(I_A) = 1$ . Detto  $A_0 = A$ , esiste una successione di insiemi misurabili  $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \dots$  con  $\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A) \cdot 2^{-n}$  e  $G(I_{A_n}) \geq 2^{-n}$ : poniamo allora  $X_n = 2^n \cdot I_{A_n}$ . La successione  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge in probabilità a 0 e tuttavia  $G(X_n) \geq 1$   $\square$

Da questi risultati si vede che se si vuole estendere la teoria delle misure coerenti di rischio all'intero spazio  $L^0$  bisogna consentire a  $\rho$  di prendere valori infiniti:  $\rho(X) = +\infty$  ha senso economicamente (vuol dire che la situazione è insostenibile, nessun salvataggio è possibile) mentre  $\rho(X) = -\infty$  non ha senso (vorrebbe dire che qualunque spesa ulteriore si possa fare la situazione è tranquilla). In ogni caso, anche considerando misure di rischio a valori in  $] -\infty, +\infty]$ , non esistono dei teoremi di rappresentazione eleganti come i precedenti e non affrontiamo questa teoria.

## 5.3 Esempi e misure di rischio in pratica

Vediamo alcuni esempi concreti di misure di rischio:

- $TCE_\alpha(X) = \mathbf{E}[-X \mid X \leq q_\alpha(X)]$  (questa è chiamata *Tail Conditional Expectation*)
- $\rho_\alpha(X) = \sup \{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] \mid \mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \text{ tali che } \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \leq \frac{1}{\alpha} \}$
- $AVaR_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_u(X) du$

Mentre è evidente che la seconda è una misura coerente di rischio, non è evidente che lo siano la prima e la terza; tuttavia come vedremo se la distribuzione di probabilità della v.a.  $X$  è diffusa, queste tre misure coincidono.

**Proposizione 5.3.1.** *Per ogni  $X$  si ha  $TCE_\alpha(X) \leq \rho_\alpha(X)$ , inoltre se  $\mathbf{P}\{X \leq q_\alpha(X)\} = \alpha$ , allora  $TCE_\alpha(X) = \rho_\alpha(X)$ .*

*Dimostrazione.* La prima parte è ovvia, per la seconda chiamiamo  $A = \{X \leq q_\alpha(X)\}$  ( e quindi  $\mathbf{P}(A) = \alpha$  ) e consideriamo  $\mathbf{Q}$  con  $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \leq \frac{1}{\alpha}$ .

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] = \frac{1}{\alpha} \int_A (-X) d\mathbf{P} + \int_A (-X) \left( \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} - \frac{1}{\alpha} \right) d\mathbf{P} + \int_{A^c} (-X) \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} \leq$$

(notiamo che  $(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} - \frac{1}{\alpha})$  è negativo)

$$\leq \mathbf{E}[-X | X \leq q_\alpha(X)] - q_\alpha(X) \int_A \left( \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} - \frac{1}{\alpha} \right) d\mathbf{P} - q_\alpha(X) \int_{A^c} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} =$$

(notiamo che la somma del secondo e del terzo termine è 0)

$$= \mathbf{E}[-X | X \leq q_\alpha(X)]$$

□

**Proposizione 5.3.2.** *Vale la formula*

$$AVaR_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_{\{X \leq q_\alpha(X)\}} (-X) d\mathbf{P}$$

*Dimostrazione.* Sia  $F$  una funzione di ripartizione e definiamo le due pseudo-inverse (definite per  $0 < t < 1$ )

$$G^+(t) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > t\}$$

$$G^-(t) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq t\}$$

Se  $Y$  ha legge uniforme su  $[0,1]$ , si è visto nel corso di Probabilità che  $G^-(Y)$  ha funzione di ripartizione  $F$  e lo stesso vale per  $G^+(Y)$  (poiché  $G^+$  e  $G^-$  differiscono al più su un insieme numerabile di punti).

Fissiamo la v.a.  $X$ , sia  $F$  la sua funzione di ripartizione e notiamo che si ha  $q_\alpha(X) = G^-(\alpha)$ . Occorre provare l'eguaglianza

$$\int_0^\alpha q_u(X) du = \int_{\{X \leq q_\alpha(X)\}} X d\mathbf{P}$$

Il termine destro è eguale a  $\int_{]-\infty, G^-(\alpha)]} x dF(x)$  ed il termine sinistro a  $\int_{]0, \alpha]} G^-(u) du$ .

Consideriamo l'applicazione  $G^- : ]0, \alpha] \rightarrow ]-\infty, G^-(\alpha)]$  e l'immagine della misura di Lebesgue (ristretta a  $[0, 1]$ ), mediante  $G^-$  è la probabilità associata ad  $F$ , cioè la legge di probabilità di  $X$ : l'eguaglianza è allora immediata. □

**Corollario 5.3.3.** *Se  $\mathbf{P}\{X \leq q_\alpha(X)\} = \alpha$ , allora*

$$AVaR_\alpha(X) = TCE_\alpha(X) = \rho_\alpha(X)$$

Vediamo su un esempio concreto la superiorità di queste misure rispetto al VaR nell'evidenziare situazioni più rischiose. Consideriamo una v.a.  $X$  che prende il valore -100.000 con probabilità 0,01 e poi il valore 0. Considerando come d'uso  $\alpha = 0,01$ , abbiamo  $VaR(X)=100.000$  e  $TCE(X)=100.000$

Se consideriamo invece una v.a.  $Y$  che prende il valore -50.000 con probabilità 0,005, il valore -200.000 con probabilità 0,0025 e -600.000 con probabilità 0,0025 (e poi il valore 0) abbiamo  $VaR(Y)=50.000$  e  $TCE(Y)=225.000$ . Cioè il VaR non riesce ad evidenziare il fatto che la seconda posizione è molto più rischiosa.

Naturalmente tutti questi risultati sono interessanti dal punto di vista teorico, ma non risolvono per una Società Finanziaria il problema di calcolare effettivamente il rischio degli investimenti: il vero problema è trovare un modello probabilistico (“scenario”) realistico.

Un metodo frequentemente usato è quello della cosiddetta *simulazione storica*: si considerano cioè i risultati di un alto numero di giorni passati (poniamo 500 giorni) e su questi si fa una media. Questo metodo ovviamente non si accorge del fatto che si presentino situazioni nuove.

Una raccomandazione del S.E.C. (Security and Exchange Commission) è di valutare con una certa percentuale di probabilità (poniamo il 70%) i risultati storici e di aggiungere due scenari “catastrofici” ai quali dare un peso del 30%.

Un altro modo è costruire un modello teorico ma si pongono serie difficoltà nel trovare un modello realistico. Le variabili gaussiane (che tanto peso hanno avuto nei capitoli precedenti) sono inadatte a misurare il rischio perché la loro densità tende a zero troppo in fretta: occorrono distribuzioni con “code” più pesanti (“fat tails”).

Un'altra proprietà molto comoda dal punto di vista matematico ma deleteria nella misurazione del rischio è l'indipendenza tra variabili aleatorie: occorre allora studiare la *dipendenza* e questo è molto più complicato ... accenneremo a questo problema nel paragrafo successivo.

## 5.4 Dipendenza tra variabili aleatorie

Cominciamo con alcuni richiami sulle funzioni di ripartizione: se  $F$  è la f.d.r. di una v.a.  $X$ , è noto che  $F$  è continua se e solo la legge di  $X$  è *diffusa* (cioè tutti i punti sono  $\mathbf{P}_X$ -trascurabili), inoltre è facile constatare che  $F$  è

continua se e solo se l'immagine di  $F$  è tutto  $[0, 1]$  (si prolunga  $F$  a  $[-\infty, +\infty]$  ponendo  $F(-\infty) = 0$  e  $F(+\infty) = 1$ ).

Inoltre, se  $F$  è continua e  $X$  ha legge associata ad  $F$ ,  $F(X)$  ha legge uniforme su  $[0, 1]$ : infatti  $X$  ha la legge di  $G^-(U)$  (dove  $U$  è uniforme su  $[0, 1]$ ) e quindi  $F(X)$  ha la legge di  $F(G^-(U)) = (F \circ G^-)(U) = U$ .

Notiamo anche che, sempre se  $F$  è continua,  $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$  (ma non è vero il viceversa), tuttavia si verifica facilmente che si ha  $\mathbf{P}\{X \leq x\} = \mathbf{P}\{F(X) \leq F(x)\}$  (questa osservazione ci sarà utile più avanti).

Se  $(X, Y)$  è una v.a. doppia, la sua funzione di ripartizione è definita da  $F(x, y) = \mathbf{P}\{X \leq x, Y \leq y\}$ ; essa gode delle seguenti proprietà

- 1)  $x_1 \leq x_2$  e  $y_1 \leq y_2 \Rightarrow F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$
- 2)  $F$  è continua a destra
- 3)  $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$ ,  $F(+\infty, +\infty) = 1$

Inoltre si ha  $F(x, +\infty) = F_1(x) = \mathbf{P}\{X \leq x\}$  (e analogamente  $F(+\infty, y) = F_2(y)$ ). Si dimostra (con un poco più di fatica che nel caso a una dimensione) che la funzione di ripartizione è in corrispondenza biunivoca con la legge di probabilità della variabile  $(X, Y)$ .

Se  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  è una v.a. vettoriale, la funzione di ripartizione  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  è definita in modo analogo, e in particolare l'estensione della proprietà 1) si definisce nel modo seguente:

$$\text{se, } \forall i, x_{i,1} \geq x_{i,0} \Rightarrow \sum_{j_1, \dots, j_d} (-1)^{j_1 + \dots + j_d} F(x_{1,j_1}, \dots, x_{d,j_d}) \geq 0$$

Quello che segue viene enunciato per semplicità per variabili doppie, ma rimane vero per variabili vettoriali di qualunque dimensione (finita). Se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti, si ha  $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$ : in generale il passaggio dalle funzioni di ripartizione marginali a quella globale si fa attraverso le *copulae*.

**Definizione 5.4.1.** Si chiama **copula** (bivariata) una funzione  $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  che sia la funzione di ripartizione di una v.a. doppia  $(X, Y)$  le cui marginali hanno distribuzione uniforme su  $[0, 1]$ .

In realtà interessa  $C$  definita su  $[0, 1] \times [0, 1]$  e particolare si avrà  $C(x, 0) = C(0, y) = 0$ ,  $C(x, 1) = x$ ,  $C(1, y) = y$ . Se  $F_1$  e  $F_2$  sono due funzioni di ripartizione a una dimensione e  $C$  è una copula, è immediato constatare che  $C(F_1(x), F_2(y))$  è una funzione di ripartizione congiunta: in realtà vale anche il viceversa.

**Teorema 5.4.2 (Teorema di Sklar).** *Sia  $F$  una funzione di ripartizione doppia: esiste una copula bivariata  $C$  tale che*

$$F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y))$$

*Inoltre se  $F_1$  e  $F_2$  sono continue,  $C$  è univocamente determinata.*

L'unicità di  $C$  nel caso in cui le  $F_i$  siano continue è evidente, e sempre in questo caso la dimostrazione è quasi ovvia: si ha infatti

$$F(x, y) = \mathbf{P}\{F_1(X) \leq F_1(x), F_2(Y) \leq F_2(y)\} = C(F_1(x), F_2(y))$$

Nel caso generale invece la dimostrazione è più complessa e la omettiamo. Notiamo ad esempio che la *copula dell'indipendenza* è la funzione  $C(x, y) = xy$ , se si considera  $C(x, y) = \min(x, y)$ ,  $C(F_1, F_1)$  è la funzione di ripartizione di  $(X, X)$ .

La *copula Gaussiana* ( $n$ -variata) è definita in questo modo: se  $\Phi$  è la funzione di ripartizione della variabile gaussiana standard e  $\Phi_P$  la funzione di ripartizione di una variabile gaussiana  $n$ -dimensionale con media 0 e matrice delle covarianze  $P$

$$C(x_1, \dots, x_n) = \Phi_P(\Phi^{-1}(x_1), \dots, \Phi^{-1}(x_n))$$

In generale per una copula  $n$ -variata valgono i cosiddetti *limiti di Fréchet*:

$$\max\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1 - n, 0\right) \leq C(x_1, \dots, x_n) \leq \min(x_1, \dots, x_n)$$

La nozione di copula è stata introdotta da Sklar nel 1959 ed ha avuto un forte risveglio di interesse in questi ultimi anni nei problemi di valutazione del rischio: se  $X_1, \dots, X_d$  rappresentano  $d$ -posizioni (cioè investimenti in  $d$  campi differenti) e si riesce a valutare in modo realistico le loro distribuzioni di probabilità, per valutare il rischio globale occorre trovare una opportuna copula  $d$ -dimensionale e comporla con le funzioni di ripartizione marginali delle singole posizioni.

## 5.5 Appendice

Prima di affrontare la dimostrazione del **Lemma 5.2.6** vediamo un risultato preliminare: questo è enunciato nel caso dello spazio  $L^2$  ma vale in qualsiasi spazio di Hilbert (o più in generale di Banach *riflessivo*).

**Lemma 5.5.1.** *Sia  $(X_n)_{n \geq 1}$  una successione di v.a. uniformemente limitata in  $L^2$  e convergente debolmente ad una v.a.  $X$ : esiste una successione  $(Y_n)_{n \geq 1}$ , dove ogni  $Y_n$  è una combinazione convessa delle variabili  $(X_n, X_{n+1}, \dots)$  convergente in  $L^2$  ad  $X$ .*

*Dimostrazione.* Chiamiamo  $K_n$  l'involuppo convesso delle variabili  $(X_n, X_{n+1}, \dots)$  e notiamo che, essendo appunto convesso, la chiusura  $\bar{K}_n$  rispetto alla topologia di  $L^2$  coincide con la chiusura debole: poiché evidentemente  $X \in \bar{K}_n$ , possiamo trovare  $Y_n \in K_n$  con  $\|Y_n - X\| < \frac{1}{n}$ .  $\square$

Vediamo ora la dimostrazione di 5.2.6: è evidente che se  $C_N$  è chiuso per la convergenza  $\sigma(L^\infty, L^1)$  lo è pure per la convergenza in probabilità, vediamo dunque il viceversa.

Sia dunque  $(X_n)_{n \geq 1}$  una successione contenuta in  $C_N$  (e quindi anche uniformemente limitata in  $L^2$ ) convergente ad  $X$  per la topologia  $\sigma(L^\infty, L^1)$  (e quindi anche debolmente in  $L^2$ ) e consideriamo come sopra la successione  $(Y_n)_{n \geq 1}$  che è ancora contenuta in  $C_N$  e converge ad  $X$  in  $L^2$  e quindi anche in probabilità: ne segue che  $X \in C_N$ , cioè il risultato voluto.